

Treball de Fi de Grau

## **Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials**

### **Disseny d'aplicacions interactives per a la docència de control automàtic**

#### **MEMÒRIA**

**Autor:** Anna Ruiz Sánchez  
**Director:** Ramón Costa Castelló  
**Convocatòria:** Setembre 2018



Escola Tècnica Superior  
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



## Resum

El desenvolupament accelerat dels sistemes informàtics ha comportat un canvi en la forma en què l'home s'enfronta als seus reptes i problemes. El camp de l'enginyeria, per descomptat, va de la mà amb aquests canvis. En particular, l'àrea de control automàtic, a la qual es refereix aquest projecte, s'ha beneficiat enormement amb la possibilitat de realitzar simulacions de sistemes reals.

El programari existent permet als enginyers concentrar-se més en l'anàlisi de les dades, que en la realització dels càlculs per a la solució dels models matemàtics. Per al desenvolupament d'aquest projecte s'empra *Sysquake*, ja que presenta característiques que fan possible el desenvolupament d'eines interactives on és fàcil observar la variació de paràmetres a mesura que es manipulen els gràfics i viceversa.

Així doncs, l'objectiu d'aquest projecte és desenvolupar algunes aplicacions gràfiques i interactives, per tal de donar suport a la docència. L'ús d'aquestes eines permet als usuaris exposar o assolir amb més facilitat conceptes que són difícils d'entendre a través de classes teòriques. La seva elaboració inclou tasques de disseny i programació i estan estructurades en tres parts: el contingut teòric, on es descriuen els conceptes tractats; la pantalla, on es mostren els elements i la seva manipulació; i, per últim, alguns exemples que mostren el seu funcionament.



# Sumari

<b>RESUM</b>	<b>1</b>
<b>SUMARI</b>	<b>3</b>
<b>1. PREFACI</b>	<b>7</b>
1.1. Origen del projecte .....	7
1.2. Motivació .....	7
1.3. Requeriments previs.....	7
<b>2. INTRODUCCIÓ</b>	<b>9</b>
2.1. Objectius del projecte.....	9
2.2. Abast del projecte.....	9
<b>3. LES APLICACIONS INTERACTIVES</b>	<b>11</b>
3.1. Filosofia .....	11
3.1.1. Contingut teòric.....	11
3.1.2. Pantalla.....	11
3.1.3. Exemples.....	11
3.2. Procés d'elaboració .....	12
<b>4. LA VISUALITZACIÓ I LA INTERACTIVITAT</b>	<b>13</b>
4.1. Visualització .....	13
4.2. Interactivitat .....	13
<b>5. SYSQUAKE</b>	<b>15</b>
5.1. Característiques .....	15
5.2. Aplicacions .....	16
<b>6. CONTROL AUTOMÀTIC</b>	<b>19</b>
6.1. Introducció.....	19
6.2. Tipus de sistemes de control.....	20
6.3. Representació del sistema de control.....	21
6.4. Diagrama de blocs.....	22
6.4.1. Definició.....	22
6.4.2. Senyals d'entrada .....	23
6.4.3. Senyal d'error i senyal de control.....	25
6.4.4. Senyal de sortida.....	26
6.4.5. Convertidors AD/DA .....	26

6.4.6.	Controladors.....	30
6.4.7.	Planta .....	40
6.5.	Mapa de pols i zeros.....	41
<b>7.</b>	<b>RESPOSTA TEMPORAL EN TEMPS CONTINU _____</b>	<b>45</b>
7.1.	Contingut teòric .....	45
7.1.1.	Introducció .....	45
7.1.2.	Representació interna i externa .....	45
7.1.3.	Concepte d'estat .....	46
7.1.4.	Equacions del model d'estat .....	47
7.1.5.	Funció de transferència i model d'estat .....	48
7.1.6.	Sistema de primer ordre sense zeros.....	49
7.1.7.	Sistema de segon ordre sense zeros .....	50
7.1.8.	Efecte d'un zero en un sistema de primer ordre .....	52
7.1.9.	Efecte d'un zero en un sistema de segon ordre.....	53
7.1.10.	Sistema genèric .....	55
7.2.	Pantalla.....	58
7.3.	Exemples.....	60
7.3.1.	Sistema estable.....	60
7.3.2.	Sistema inestable .....	61
<b>8.</b>	<b>DISSENY DE CONTROLADORS PER ASSIGNACIÓ DE POLS ____</b>	<b>63</b>
8.1.	Contingut teòric .....	63
8.1.1.	Introducció .....	63
8.1.2.	Definicions .....	63
8.1.3.	Disseny de controladors.....	66
8.2.	Pantalla.....	69
8.3.	Exemples.....	72
8.3.1.	Sistema estable.....	72
8.3.2.	Sistema inestable .....	73
<b>9.</b>	<b>ESTUDI D'IMPACTE _____</b>	<b>75</b>
9.1.	Ambiental .....	75
9.1.1.	Realització del projecte.....	75
9.1.2.	Posada en pràctica del projecte .....	76
9.2.	Social.....	76
<b>10.</b>	<b>ESTUDI ECONÒMIC _____</b>	<b>77</b>
10.1.	Realització del projecte.....	77
10.2.	Posada en marxa del projecte .....	78

<b>CONCLUSIONS</b>	<b>81</b>
<b>AGRAÏMENTS</b>	<b>83</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>85</b>
Referències bibliogràfiques .....	85
Bibliografia complementària .....	85



# 1. Prefaci

## 1.1. Origen del projecte

El present projecte sorgeix com a continuació de la feina realitzada pel departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial (ESAI) de la *Universitat Politècnica de Catalunya* (UPC), en el seu afany per invertir en noves solucions en educació, en donar un major abast a la difusió de conceptes de control automàtic i en el desenvolupament d'eines per aconseguir audiències no tradicionals.

## 1.2. Motivació

La implantació de l'anomenat *pla Bolonia* busca la participació activa dels alumnes en el seu procés d'aprenentatge, canviant la cultura d'estudiants "*receptors d'informació*" a la d'estudiants "*inquisidors del saber i el coneixement*". Un escenari ideal en el qual professors i alumnes comparteixin l'apassionant aventura del descobriment.

D'aquesta manera, el present projecte pretén facilitar la recerca de compromís entre teoria i pràctica en l'aprenentatge.

## 1.3. Requeriments previs

Per a obtenir una experiència vertaderament enriquidora amb aquest projecte, tant per part de l'autora com dels posteriors usuaris, és recomanable haver adquirit una sèrie de coneixements previs en el camp del control automàtic.

D'altra banda, per a la redacció d'aquest projecte cal familiaritzar-se amb el programari *Sysquake*, pel que és interessant conèixer el seu llenguatge de programació.





## 2. Introducció

### 2.1. Objectius del projecte

L'objectiu d'aquest projecte és incentivar la curiositat i la motivació de l'usuari envers l'àmbit del control automàtic, a partir de la creació d'un conjunt d'aplicacions gràfiques i interactives.

Aquestes eines, junt amb el text que les acompanyen, pretenen ser útils tant per al professorat com per als estudiants. Per als primers perquè els hi permet presentar els conceptes d'una manera visual i intuïtiva i serveixen com a recolzament a les classes teòriques. Per als segons perquè els hi facilita la comprensió i l'aprenentatge autònom de conceptes bàsics de control automàtic.

### 2.2. Abast del projecte

L'abast del projecte cobrirà la creació de dues aplicacions gràfiques que permetin la visualització d'algun concepte de la teoria de control, tot incloent elements interactius per tal d'incentivar la seva utilització.

Cada aplicació està acompanyada d'un resum teòric que presenta el concepte de manera formal i analítica.

S'empra *Sysquake* com a eina de desenvolupament, ja que la interactivitat està completament integrada i el seu llenguatge de programació és conegut.



## **3. Les aplicacions interactives**

### **3.1. Filosofia**

El present projecte consisteix en crear dues aplicacions interactives per tal de presentar la teoria de control automàtic d'una manera més visual i fer els seus conceptes més entenedors.

Els diferents components han de ser fàcilment recognoscibles i l'usuari ha de poder distingir clarament els elements estàtics i dinàmics. Seguint aquesta línia, la manipulació ha de ser intuïtiva, senzilla i representativa. Finalment, totes les aplicacions tenen com a denominador comú l'estructura, amb la finalitat de que l'usuari es familiaritzi ràpidament amb l'aplicació.

Per a cada aplicació interactiva s'inclouen tres apartats diferents:

#### **3.1.1. Contingut teòric**

Es presenta la teoria que s'amaga darrere de l'aplicació en qüestió i que ha permès el desenvolupament d'aquesta. La seva funció és situar a l'usuari per tal que compregui la utilitat de cada element i la relació entre els diferents elements il·lustrats.

#### **3.1.2. Pantalla**

S'exposa de forma detallada el funcionament dels diferents elements que apareixen per pantalla, ja siguin gràfics, equacions o barres mòbils. S'especifica, per a cada element representat els colors i formes que prenen, les diferents configuracions que es poden representar i com l'usuari pot manipular els elements interactius. Es mostra la imatge de la pantalla principal mitjançant una captura de pantalla.

#### **3.1.3. Exemples**

Es mostren una varietat d'exemples que mostren l'exposat en l'apartat contingut teòric. L'objectiu d'aquesta secció és donar una visió de les diferents configuracions possibles per tal de facilitar la comprensió dels conceptes.

## 3.2. Procés d'elaboració

Per a la creació de cada aplicació interactiva es segueixen els diferents passos:

### 1. Definició i elecció dels elements a representar.

Per al disseny de l'aplicació cal, primerament, decidir els conceptes que es volen il·lustrar. A continuació, s'ha de determinar quines són les representacions que resulten més útils per a plasmar els conceptes triats, així com les relacions que existeixen entre elles. Per últim, cal escollir els elements necessaris, com els títols, equacions, gràfics i els components que permeten la seva manipulació.

### 2. Programació.

*Sysquake* permet l'execució de fitxers realitzats amb qualsevol editor de text, davant de la senzillesa i les mancances del que incorpora, s'empra *Atom* per a l'escriptura del programa.

### 3. Muntatge i conversió del codi.

El codi obtingut amb l'editor de text es guarda amb l'extensió \*.sq (*arxiu.sq*) que és l'extensió que empra *Sysquake* per defecte. D'aquesta manera es podran executar les funcions pròpies del programa i visualitzar les figures implementades. Per obtenir les aplicacions que empraran els usuaris finals és necessari muntar els executables (*arxiu.exe*).

### 4. Redactat de la memòria

És recomanable que la memòria sigui redactada per un públic amb coneixements molt bàsics envers la matèria, ja que es tendeix a obviar molts conceptes que no ho són tant. Els documents també serveixen de manual d'ús pels usuaris. Cada aplicació interactiva disposa d'una descripció de les seves funcions així com exemples del seu ús.

## 4. La visualització i la interactivitat

### 4.1. Visualització

Les principals idees de control automàtic són realment riques en contingut visual, que pot representar-se de forma intuïtiva i geomètrica. Aquests continguts es poden emprar per presentar tasques, explicar conceptes i manipular mètodes en la resolució dels problemes. Amb gran freqüència s'utilitzen representacions simbòliques, diagrames visuals i altres formes de processos imaginatius que permeten adquirir el que es podria anomenar com una certa intuïció de l'abstracte.

Els experts disposen d'imatges visuals que actuen com a mecanismes intuïtius per a entendre els fonaments de la seva disciplina. A partir d'aquestes imatges són capaços de relacionar i projectar, de manera molt versàtil, una enorme quantitat de fets que els hi permeten seleccionar, de manera natural i sense aparent esforç, quina és la línia d'atac més eficaç per a resoldre els complexos problemes als quals s'enfronten. Aquesta forma d'actuar, amb atenció explícita a les representacions específiques que permeten explicar les relacions abstractes que són d'interès, és el que s'anomena *visualització en control*.

El fet que la visualització sigui un aspecte especialment important en l'activitat de l'expert en control és completament natural si es tenen en compte les matemàtiques aplicades que s'amaguen darrere la teoria. Cal també fer èmfasi en la seva importància en la transmissió i comunicació de coneixements.

### 4.2. Interactivitat

Tradicionalment els sistemes es dissenyen seguint un procés iteratiu. Les especificacions del problema no s'acostumen a utilitzar per calcular el valor dels paràmetres del sistema perquè no hi ha fórmula explícita que les relacioni de forma directa. Aquesta és la raó de dividir cada iteració en dues fases. La primera, anomenada *síntesi*, consisteix a calcular els paràmetres desconeguts del sistema, prenent com a base un grup de variables de

disseny, que estan relacionades amb les especificacions. Durant la segona fase, anomenada *anàlisi*, s'avalua el comportament del sistema i es compara amb les especificacions. Si no concorden, es modifiquen les variables de disseny i es porta a terme una nova iteració.

És possible però, fondre les dues fases en una de manera que la modificació d'un paràmetre que afecta al disseny provoqui l'actualització dels resultats de l'anàlisi i es mostrin immediatament, o viceversa, que sigui possible modificar visualment elements representatius de l'anàlisi i s'obtinguin els paràmetres de disseny necessaris per assolir aquests objectius. D'aquesta manera el procés de disseny es fa realment dinàmic i es percep el canvi en el comportament dels elements que s'estan manipulant. Aquesta capacitat interactiva permet identificar molt més fàcilment els compromisos que es poden assolir.

Per als que s'inicien en el camp del control automàtic, molts dels conceptes no són molt intuïtius quan s'aborden per primer cop, és per això que en aquests últims anys s'han desenvolupat moltes eines destinades a l'aprenentatge. Els recursos de càlcul i els entorns de programació disponibles en l'actualitat han permès que sorgeixi una nova generació de programes per a l'aprenentatge interactiu. Aquestes eines es basen en objectes que admeten una manipulació gràfica directa, al fer variar qualsevol element actiu s'inicia de forma automàtica un nou processament i se'n presenten els resultats. D'aquesta manera es percep com les seves modificacions afecten els resultats obtinguts.

Aquestes eines interactives doncs, intenten desmitificar conceptes matemàtics abstractes a través de la visualització. Amb aquesta filosofia, s'han desenvolupat dues eines interactives per explicar conceptes bàsics, utilitzant *Sysquake* com a eina de treball.

## 5. Sysquake

### 5.1. Característiques

*Sysquake* és un software innovador, potent i flexible que permet entendre sistemes, solucionar problemes i dissenyar productes, aprofitant la visualització gràfica. Proporciona les eines necessàries per a la resolució de problemes matemàtics complexes, diferenciant-se d'altres programes tradicionals emprant gràfics interactius i permetent la seva manipulació per part de l'usuari.

Algunes de les seves característiques més rellevants són:

- **Potent:** amb un llenguatge integrat que inclou més de 630 funcions natives, operadors i ordres fàcilment extensibles, *Sysquake* es pot utilitzar en un ampli ventall d'àrees. Té integrades funcions gràfiques específiques per a l'estudi de sistemes dinàmics i generals per a la visualització de qualsevol tipus de dades.
- **Ràpid:** el que seria lent en un script escrit en un llenguatge matemàtic interpretat d'alt nivell s'ha implementat de forma molt eficient en el codi natiu de la màquina. L'interpret matemàtic en si mateix és molt ràpid.
- **Programes incorporats:** inclou un ric conjunt d'aplicacions per a una àmplia gamma d'àrees, com ara control clàssic, control robust i filtres digitals. Permet obrir els programes incorporats en format de text per tal de ser modificats i ajustats als requisits del programador.
- **Llenguatge:** el llenguatge de programació és molt similar a altres llenguatges d'alt nivell, sobretot a l'utilitzat per *Matlab*. Ara bé, es diferencia d'aquest per la incorporació de comandes i funcions particulars per a la inclusió de la interactivitat dels gràfics.



- **Fàcil d'usar:** la interfície gràfica d'usuari és molt senzilla i intuïtiva. El desplegament de diversos nivells permet que l'usuari experimenti sense por a perdre els resultats obtinguts fins al moment.
- **Fàcil d'integrar:** utilitza fitxers de text per als seus programes i les seves dades. Es poden crear a mà amb qualsevol editor de text i intercanviar dades amb altres aplicacions. Només és necessari el codi per visualitzar les diferents figures i les manipulacions de l'usuari.
- **Creador d'aplicacions:** *Sysquake Application Builder* permet crear aplicacions autònomes que es poden redistribuir lliurement i és compatible amb la majoria de funcions *Sysquake*, sense cap extensió.

## 5.2. Aplicacions

El disseny dels sistemes de control no és un procés seqüencial, sinó més aviat una integració entre càlcul numèric, anàlisi de resultats i ajust dels paràmetres, d'aquí sorgeix la necessitat de crear una eina que minimitzi el temps d'execució d'aquests passos.

Les característiques de *Sysquake* s'adapten molt bé a aquest procés, ja que permeten no només observar l'actualització dels gràfics en temps real mentre es modifiquen els paràmetres, sinó també la manipulació dels gràfics mentre varien els paràmetres automàticament.

L'ús de *Sysquake* és altament recomanable quan es busca aconseguir un dels següents objectius:

- **Comprensió de conceptes bàsics:** sovint, en l'enginyeria, la teoria no és molt intuïtiva, sobretot quan es tracta de relacionar variables de diferents dominis. Els mecanismes bàsics que relacionen variables poden ser il·lustrats fàcilment i de forma efectiva amb *Sysquake*.

- **Disseny de sistemes:** la simulació de sistemes dinàmics es pot beneficiar enormement de la interactivitat de *Sysquake*. Els paràmetres sovint tenen efectes a llarg termini que són difícils de deduir intuïtivament del model o d'alguns gràfics de simulació estàtica. La seva manipulació permet observar el seu paper i quin pot ser el seu comportament futur.



## 6. Control Automàtic

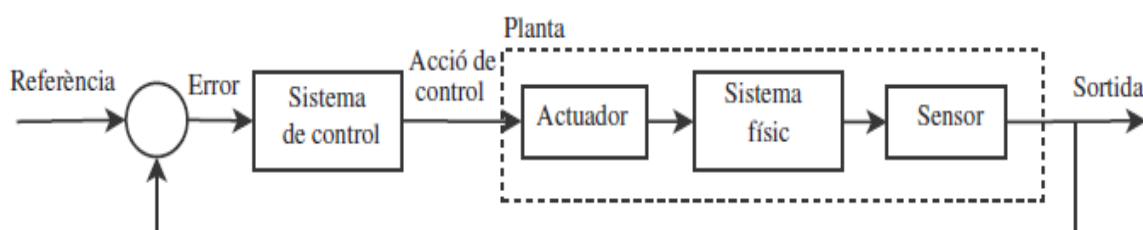
### 6.1. Introducció

El control automàtic és una branca de l'enginyeria que s'ha desenvolupat de manera vertiginosa en els últims temps. L'ús intensiu de les tècniques de control té com a origen l'evolució i tecnificació de les tecnologies de mesurament i control.

El seu estudi i aplicació ha contribuït al reconeixement universal dels seus avantatges i beneficis associats a l'àmbit industrial, que és on té una de les seves majors aplicacions. Això és degut, principalment, a la necessitat de controlar un gran nombre de variables i a la creixent complexitat dels sistemes.

El control doncs, és una tecnologia present en molts àmbits de la ciència i de la tècnica que té com a objectiu que els dispositius físics es comportin d'acord amb unes especificacions determinades. Per tal d'aconseguir-ho s'incorpora un sensor, dispositiu que mesura la magnitud que es vol controlar (sortida) i un actuador, dispositiu que modifica el comportament del dispositiu físic (acció de control).

En el marc de la teoria de control, el conjunt dispositiu físic, sensor i actuador rep el nom de *planta*. Així el sistema de control, o controlador, determina l'acció de control necessària per tal que la sortida de la planta segueixi una referència determinada. La *Il·lustració 1* mostra un esquema de blocs on apareixen els diferents elements i la seva relació.



*Il·lustració 1. Diagrama de blocs d'un sistema de laç tancat.*

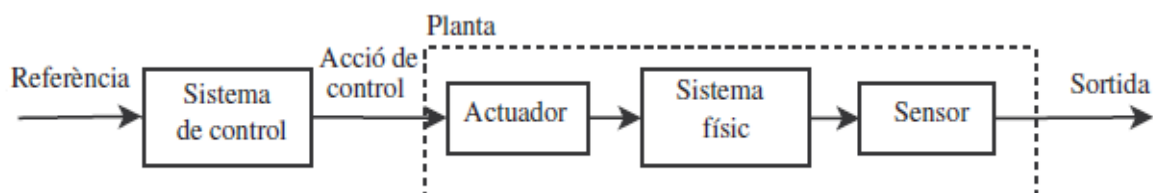
Normalment, el comportament de la planta es modela com un sistema dinàmic emprant equacions diferencials. Per aquest motiu, també és normal descriure el sistema de control mitjançant un conjunt d'equacions diferencials que són el resultat d'un procés d'anàlisi i

disseny en el que s'aplica la teoria de control. Un cop obtingut aquest conjunt d'equacions diferencials, caldrà trobar un sistema físic que es comporti d'acord amb les equacions diferencials obtingudes.

## 6.2. Tipus de sistemes de control

Els sistemes de control es poden classificar en:

- **Sistemes de llaç obert.** L'acció de control és independent de la sortida, així doncs, el senyal de sortida no influeix sobre la d'entrada, tal i com mostra la *Il·lustració 2*.



*Il·lustració 2. Diagrama de blocs d'un sistema en llaç obert.*

L'exactitud d'aquests sistemes depèn del seu calibratge, de manera que cal establir una relació entre l'entrada i la sortida amb la finalitat d'obtenir la precisió desitjada.

El principal inconvenient que presenten els sistemes de llaç obert és que són extremadament sensibles a les pertorbacions.

- **Sistemes de llaç tancat.** L'acció de control depèn, en certa manera, de la sortida, tal com mostra la *Il·lustració 1*. L'entrada és modificada en cada instant en funció de la sortida mitjançant el que s'anomena realimentació.

L'error, o diferència entre els valors de l'entrada i la sortida, actua sobre els elements de control amb la finalitat de reduir-se a zero i portar la sortida al seu valor correcte. S'intenta que el sistema segueixi sempre el senyal de consigna.

Els sistemes en llaç tancat són molt menys sensibles a les pertorbacions, ja que qualsevol modificació de les condicions del sistema afectarà la sortida, però aquest canvi serà registrat per mitjà de la realimentació com un error que és, en definitiva, la variable que actua sobre el sistema de control. D'aquesta manera, les pertorbacions es compensen i la sortida s'independitza d'aquestes.

### 6.3. Representació del sistema de control

Un procés o sistema de control és un conjunt d'elements interrelacionats capaços de realitzar una operació donada o de satisfer una funció desitjada.

Els sistemes de control es poden representar en forma de diagrames de blocs, en els que s'ofereix una expressió visual i simplificada de les relacions entre l'entrada i la sortida d'un sistema físic. Les entrades denoten variables que tenen influència sobre el procés i les sortides són els senyals d'interès o que incideixen sobre altres subsistemes.

A cada component del sistema de control se li denomina element i es representa per mitjà d'un rectangle. La interacció entre els blocs es representa per mitjà de fletxes que indiquen el sentit de flux de la informació.

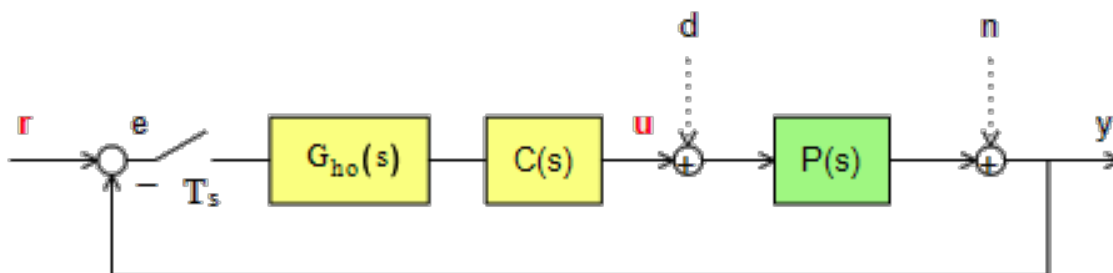
En aquests diagrames es poden fer operacions d'addició i de sostracció, que es representen per un petit cercle en el qual la sortida és la suma algebraica de les entrades amb els seus signes. També es poden representar les operacions matemàtiques de multiplicació i divisió.

La representació en diagrama de blocs no només permet obtenir models a partir de les relacions constitutives i estructurals, sinó també utilitzar certes tècniques d'anàlisi directament sobre els diagrames, conegudes com a àlgebra de blocs.

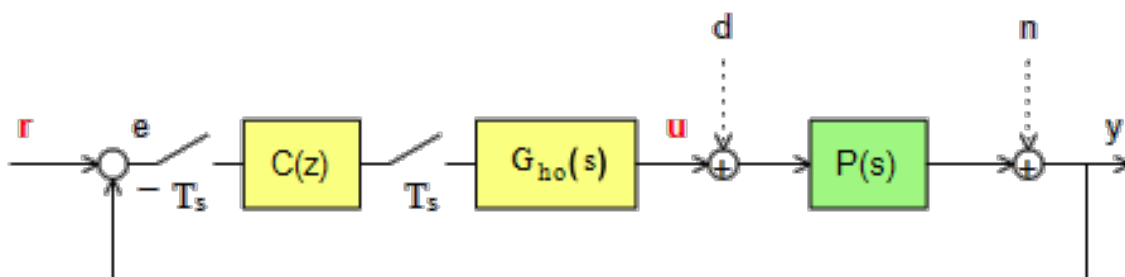
## 6.4. Diagrama de blocs

### 6.4.1. Definició

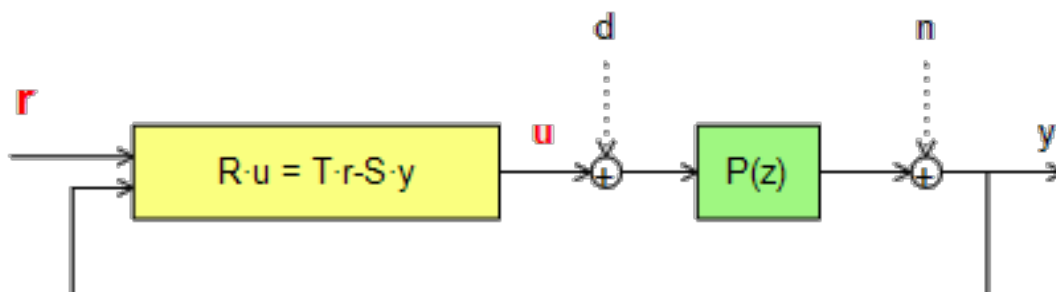
El diagrama de blocs és la representació gràfica de les relacions entre les diferents variables del sistema. S'emptra per a representar el flux de senyals i la funció realitzada pels diferents components del sistema. Dita funció es representa mitjançant la funció de transferència. En el present projecte es presenten tres tipus de diagrames de blocs:



Il·lustració 3. Diagrama de blocs de tipus 1.



Il·lustració 4. Diagrama de blocs de tipus 2.



Il·lustració 5. Diagrama de blocs de tipus 3.

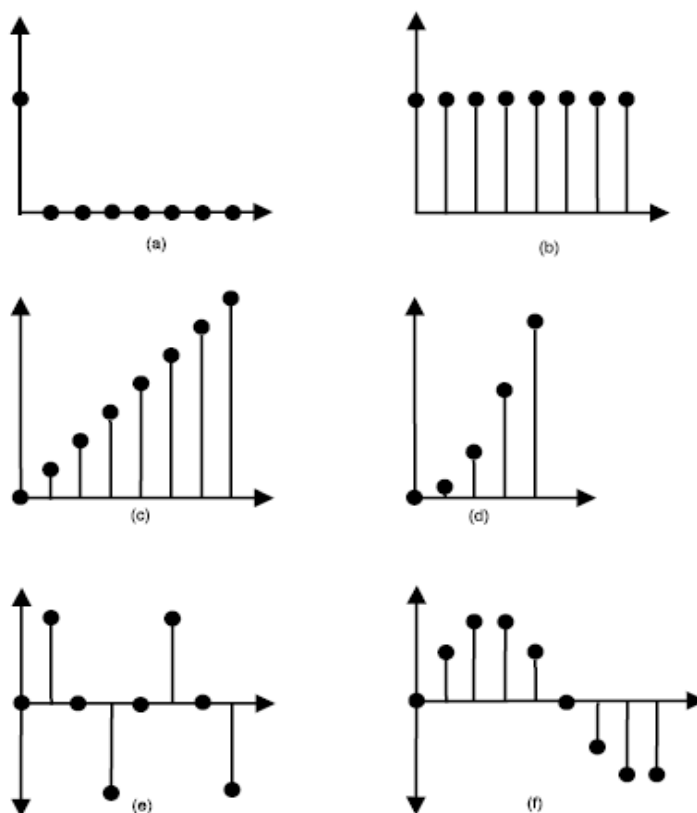
Els diferents blocs representen la relació entre variables donada per una funció de transferència. Les fletxes indiquen la direcció del flux dels senyals. Les bifurcacions són punts a partir dels quals un senyal va de manera concurrent a altres blocs o sumadors. I els sumadors realitzen dita operació algebraica amb el seu signe.

#### 6.4.2. Senyals d'entrada

Els *senyals d'entrada* són l'excitació que s'aplica al sistema de control des d'una font d'energia externa per tal de provocar una resposta.

- **Referència,  $r$ .** Valor que es desitja que assoleixi el senyal de sortida.
- **Pertorbació,  $d$  i  $n$ .** Senyal que tendeix a afectar la sortida del sistema, desviant-la del valor desitjat.

Els principals senyals d'entrada emprats són:



Il·lustració 6. Senyals bàsics emprats en la teoria de control.



- **Senyal impuls unitari.** Aquest senyal val 1 en  $k = 0$  i la resta de valors són 0. Es designa amb  $\delta$ .

$$\delta = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

*Equació 1. Senyal impuls unitari.*

- **Senyal graó unitari.** Correspon al senyal en què tots els elements, amb  $k \geq 0$ , valen 1 i la resta de valors valen 0. Aquest senyal es designa com  $\mu$  i rep el nom de funció de *Heaveside*.

$$\mu = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

*Equació 2. Senyal graó unitari.*

- **Senyal rampa unitària.** Correspon a un senyal en què tots els elements amb  $k \geq 0$  prenen un valor igual a la seva posició en la seqüència i la resta de valors valen zero. Així:

$$y_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k & k \geq 0 \end{cases}$$

*Equació 3. Senyal rampa unitària.*

Alternativament, el senyal es pot escriure de la forma  $y_k = k \mu_k$ .

- **Senyal paràbola unitària.** Correspon a un senyal en què tots els elements prenen un valor igual a la seva posició en la seqüència, elevat al quadrat. Així:

$$y_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k^2 & k \geq 0 \end{cases}$$

*Equació 4. Senyal paràbola unitària.*

Alternativament, el senyal es pot escriure de la forma  $y_k = k^2 \mu_k$ .

- **Senyal sinusoïdal.** Aquest senyal està definit valorant la funció sinus de pulsació  $\omega$  en els instants de la posició dins la seqüència.

$$y_k = \sin(\omega k) \mu_k$$

*Equació 5. Senyal sinusoidal.*

La *Il·lustració 1* mostra els principals senyals que es fan servir en la teoria de control. En aquest projecte, a més, s'inclou un últim tipus de senyal:

- **Senyal soroll blanc.** Correspon a un senyal aleatori que es caracteritza pel fet que els seus valors en dos instants de temps diferent no guarden cap correlació estadística.

A partir de la combinació i la manipulació d'altres senyals, es poden generar senyals més complexes. Les operacions principals que s'utilitzen en els senyals són:

- **Combinació lineal.** Donats dos senyals,  $r$  i  $t$ , i dos escalars,  $\alpha$  i  $\beta$ , es pot definir un nou senyal com  $y = \alpha r + \beta t$ . És a dir:

$$y_k = \alpha r_k + \beta t_k$$

*Equació 6. Combinació lineal de senyals.*

- **Avanç.** Donat un senyal,  $y$ , es pot definir un nou senyal,  $r$ , desplaçant  $p$  posicions els seus elements endavant i afegint  $p - 1$  zeros a l'inici:

$$r_k = \begin{cases} 0 & 0 \leq k < p \\ y_{k-p} & k \geq p \end{cases}$$

*Equació 7. Avanç de senyal.*

- **Retard.** Donat un senyal,  $y$ , es pot definir un nou senyal,  $r$ , desplaçant  $p$  posicions els seus elements endarrere:

$$r_k = \begin{cases} 0 & 0 < k \\ y_{k+p} & k \geq 0 \end{cases}$$

*Equació 8. Retard de senyal.*

### 6.4.3. Senyal d'error i senyal de control

- **Senyal d'error,  $e$ .** Diferència entre el senyal de referència i el senyal de sortida real.

- **Senyal de control,  $u$ .** Senyal que produeix el controlador per modificar la variable controlada de tal forma que es disminueixi o elimini l'error.

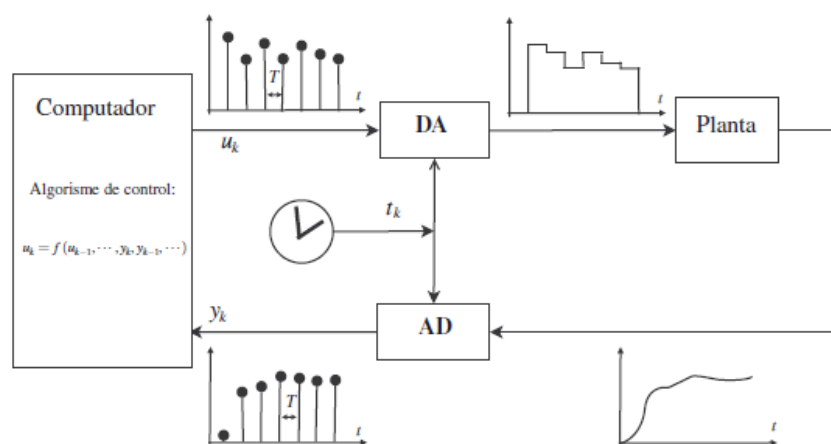
#### 6.4.4. Senyal de sortida

El *senyal de sortida*,  $y$ , és la variable que es desitja controlar. Aquest senyal és mesurable, pel que ofereix informació important sobre l'evolució del sistema.

#### 6.4.5. Convertidors AD/DA

A diferència dels circuits electrònics, els circuits hidràulics o els sistemes mecànics, que són de naturalesa contínua, els computadors són sistemes de naturalesa discreta. És a dir, els computadors no actuen contínuament sinó que únicament actualitzen la seva sortida en determinats instants de temps; de forma similar, un computador únicament observa el valor de la variable de sortida en determinats instants de temps.

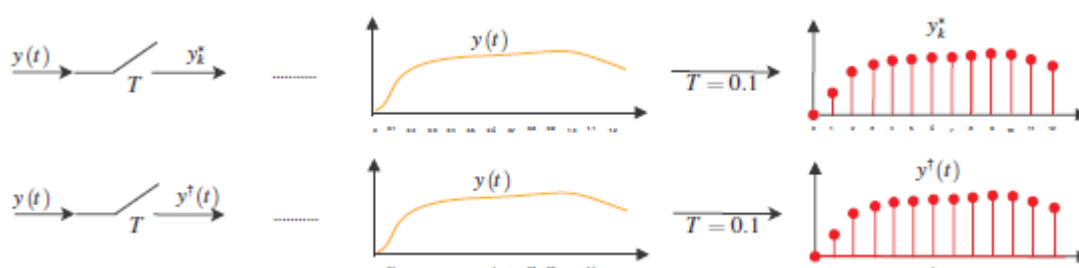
Des del punt de vista físic, l'enllaç entre l'element de temps discret, el computador, i l'element de temps continu, la planta, es realitza incorporant dos elements, el convertidor analògic-digital (AD) i el convertidor digital-analògic (DA). El primer transforma senyals del món analògic al digital, mentre que el segon realitza la funció inversa. A l'entrada i a la sortida del computador, els senyals s'obtenen / regeneren en uns instants de temps  $t_k$ . La distribució de temps més emprada és la distribució homogènia, és a dir: els instants d'actuació i mostratge són equidistants un temps  $T$ , anomenat període de mostratge ( $t = kT$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ). A més, estan sincronitzats, és a dir. l'instant en què la sortida del computador varia és el mateix instant en què es mesura l'entrada, tal com mostra la *Il·lustració 7*.



Il·lustració 7. Sistema de control digital basat en el mostratge síncron.

A continuació es defineixen els fenòmens més rellevants lligats directament amb l'enllaç entre els elements de temps continu i els elements de temps discret:

- **Mostratge.** Mostrejar consisteix a prendre el valor d'un senyal de temps continu,  $y(t)$ , en uns certs instants de temps,  $t_k$ , i a partir d'aquests valors generar un senyal de temps discret,  $y_k^*$ , tal que  $y_k^* = y(t_k)$ .



Il·lustració 8. Mostratge.

- **Manteniment.** Donat un senyal de temps discret  $y_k$  i un període de mostratge  $T$ , es defineix el senyal,  $\bar{y}(t)$ , de la forma:

$$\bar{y}(t) = y_k, \text{ amb } t \in [kT, (k+1)T]$$

Equació 9. Senyal de temps continu a partir d'un senyal discret.

Aquesta manera de construir senyals de temps continu a partir d'un senyal de temps discret rep el nom de manteniment o manteniment d'ordre zero.

El *mantenidor d'ordre zero (moz)* és un dels elements més emprats per passar senyals de temps discret a temps continu. Aquest reconstructor manté constant el

valor de la sortida en el temps entre dos instants de mostreig consecutius, és a dir:

$$f(t) = f^*(kT) \quad \forall t \in [kT, (k+1)T]$$

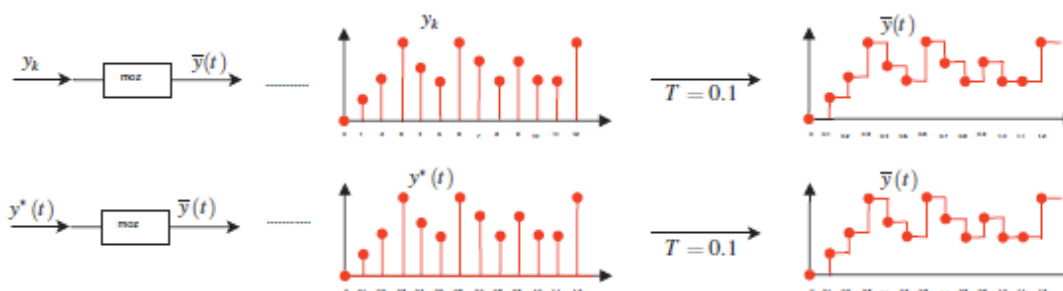
*Equació 10. Funció del mantenidor d'ordre zero.*

La funció de transferència del mantenidor d'ordre zero és:

$$G_{moz}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

*Equació 11. Funció de transferència del mantenidor d'ordre zero.*

Encara que la resposta freqüencial de  $G_{moz}(s)$  no és un rectangle és una bona aproximació. De fet, és el reconstructor més emprat a la pràctica.



*Il·lustració 9. Manteniment.*

És important adonar-se que  $\bar{y}(t)$  és un senyal constant a trams i que únicament canvia en els instants de mostreig,  $kT$ . La part superior de la *Il·lustració 9* mostra la representació en esquema de blocs i un exemple de manteniment. Cal adonar-se que el mantenidor pot rebre com a entrada un senyal de temps discret,  $y_k$ , o un senyal de temps continu,  $y^*(t)$ ; en els dos casos, la sortida és la mateixa.

A vegades, el manteniment s'aplica també sobre senyals de temps continu mostrejats; en aquest cas, donat un senyal  $y^*(t)$ , es defineix el senyal  $\bar{y}(t)$  de la forma:

$$\bar{y}(t) = y^*(kT), \text{ amb } t \in [kT, (k+1)T]$$

*Equació 12. Senyal de temps continu a partir d'un senyal continu mostrejat.*

La part inferior de la *Il·lustració 9* mostra la representació en esquema de blocs i

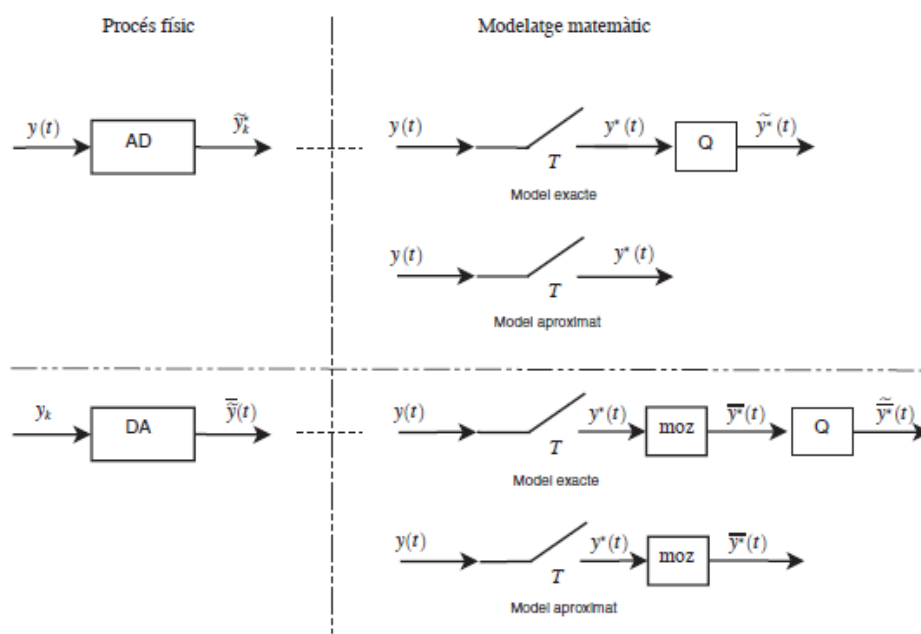
un exemple de manteniment.

- **Quantificació.** Donat un senyal de temps continu  $y(t)$  o de temps discret  $y_k$  i un conjunt de valors  $Q$ , s'anomena quantificació el procés d'assignació dels valors del senyal original als valors del conjunt.

$$\tilde{y}(t) = Q(y(t)), \quad \tilde{y}_k = Q(y_k)$$

Equació 13. Quantificació.

Des del punt de vista físic, per enllaçar els sistemes de temps discret i els de temps continu s'han d'introduir dos tipus de dispositius:



Il·lustració 10. Convertidors analògic-digital (AD) i digital-analògic (DA).

- **Convertidor analògic-digital (AD).** A partir d'un senyal de temps continu i d'un període de mostreig, el convertidor AD genera un senyal de temps discret  $y_k^*$ , que és quantificat d'acord amb les característiques del convertidor. Així, estrictament a la sortida del convertidor AD hi ha el senyal  $\tilde{y}_k^*$ . Per tant, la funcionalitat del convertidor AD es pot modelar com un procés de mostreig i una quantificació posterior o viceversa. La part superior esquerra de la Il·lustració 10 mostra l'esquema de blocs emprat per representar el convertidor AD.

A vegades, convé estudiar el comportament del convertidor AD en un context de

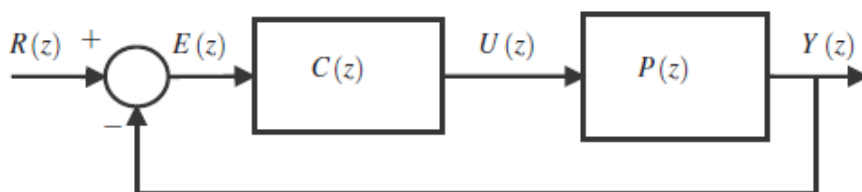
temps continu; per aquest motiu, és convenient transformar el senyal de sortida en un senyal de temps continu. En aquest context, el convertidor AD el descomponem en un mostrejador i un quantificador, tal com es mostra a la part dreta superior de la *Il·lustració 10* (model exacte). Atès que l'efecte de la quantificació és difícil de modelar i analitzar, i normalment té un efecte negligible sobre els sistemes de control, no se sol tenir en compte en el moment de modelar convertidors AD. Així, s'assumirà que si l'entrada al convertidor AD és  $y(t)$ , la sortida serà  $y^*(t)$ , com es mostra a la part superior dreta de la *Il·lustració 10* (model aproximat).

- **Convertidor digital-analògic (DA).** Aquest dispositiu parteix de senyals de temps discret  $y_k$ , els quantifica,  $\tilde{y}_k$ , i, posteriorment hi aplica un procés de manteniment, tal com s'observa en la part inferior esquerra de la *Il·lustració 10*.

En moltes ocasions, convé estudiar l'efecte del convertidor DA des d'un punt de vista de temps continu; en aquests casos, s'assumeix que el senyal d'entrada és de temps continu i que hi ha un mostrejador a l'entrada. Així, en col·locar un senyal de temps continu a l'entrada,  $y(t)$ , se li aplica un mostrejador,  $y^*(t)$ , posteriorment un procés de manteniment i finalment un procés de quantificació. L'esquema de blocs es mostra a la part inferior dreta de la *Il·lustració 10* (model exacte). Com en el cas anterior, es negligeix l'efecte del quantificador, i així s'obté l'esquema de blocs de la part inferior dreta de la *Il·lustració 10* (model aproximat).

#### 6.4.6. Controladors

Els controladors són els encarregats de fer que el sistema en laç tancat compleixi unes especificacions determinades.



*Il·lustració 11. Sistema de laç tancat.*

Els controladors lineals són sistemes físics que interaccionen amb la planta per tal que la

combinació d'ambdós blocs compleixi els requisits establerts. La planta  $P(z)$  i el controlador  $C(z)$  poden interaccionar de moltes formes; la més popular és la de la *Il·lustració 11* que té com a objectiu principal que la sortida del sistema  $Y(z)$  segueixi la referència  $R(z)$ . El controlador rep com a entrada el senyal d'error  $E(z)$ , que és la diferència entre la sortida i la referència i genera l'acció de control  $U(z)$ , que s'utilitza com a entrada a la planta.

Existeixen però, estructures de control més complexes. L'ús d'una estructura o una altra depèn de l'aplicació concreta i de les tècniques de disseny de controladors que es pretenen emprar. En general, l'estructura en cascada que es presenta es prou genèrica per la majoria de casos i serà la que s'utilitzarà la resta del text.

El controlador es descriu mitjançant una funció de transferència:

$$C(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = k \frac{(z - z_1) \dots (z - z_m)}{(z - p_1) \dots (z - p_n)}$$

*Equació 14. Funció de transferència d'un controlador.*

I presenta un conjunt de graus de llibertat o paràmetres de disseny  $b_m, \dots, b_0$  i  $a_{n-1}, \dots, a_0$  o, alternativament  $k, z_1, \dots, z_m$  i  $p_1, \dots, p_n$ , que s'han de seleccionar per tal d'assolir el compliment de les especificacions. Normalment es procura que l'ordre del controlador  $n$  sigui el més petit possible que permeti satisfer les especificacions. La manera de seleccionar els paràmetres depèn de la tècnica de disseny. Sovint resulta útil emprar els coeficients dels polinomis; en altres els pols i zeros i, altres vegades, convé agrupar-los d'altres formes.

El procés que permet obtenir els valors dels paràmetres a partir de les especificacions rep el nom de *sintonització del controlador*.

Qualsevol sistema de llaç tancat ha de ser, abans que res, estable. Dit això, a continuació es detallen algunes característiques que solen emprar-se com a especificacions:

- **Error en estat estacionari.** Un objectiu de tot sistema de control és que la sortida segueixi la referència; l'error mesura la diferència entre aquests senyals. Exigir un error en estat estacionari nul determina la forma del controlador; en canvi, un error en estat estacionari finit respecte de les entrades graó, rampa o paràbola



determina una de les constants de posició, velocitat o acceleració.

- **Estabilitat relativa (robustesa).** Mesura l'estabilitat del sistema en llaç tancat davant les incerteses en els paràmetres del sistema. Entre aquestes mesures, cal destacar el marge de guany i el marge de fase.
- **Resposta temporal.** La forma en què el sistema arriba a l'estat estacionari i el temps que triga a fer-ho són, en general, especificacions de comportament. La resposta transitòria és funció dels pols i zeros del sistema en llaç tancat. Per tant, les especificacions de resposta temporal es transformen, en general, en la ubicació dels pols i zeros en llaç tancat.

En moltes ocasions, únicament s'especifiquen els pols de llaç tancat, perquè s'assumeix que l'efecte dels zeros és negligible. També és habitual que únicament s'especifiqui la posició dels pols dominants del sistema, cosa que permet donar forma a la resposta temporal amb controladors senzills, és a dir, d'ordre baix.

- **Resposta freqüencial (ample de banda).** La resposta freqüencial dóna idea de quins components freqüencials pot seguir la sortida i quins no. Així, per tal que un sistema de llaç tancat presenti guanys propers a la unitat en aquell rang de freqüències, és a dir, que el sistema de llaç obert presenti guanys elevats en aquest mateix rang. Normalment, s'especifica el rang de freqüències en què la resposta freqüencial ha de tenir un guany gran.

Aquestes especificacions no són excloents entre si. De fet, el més habitual és que se'n plantegi més d'una de simultània.

A continuació es presenten alguns dels controladors més comuns:

- **Controladors de primer ordre.** En el control clàssic, el més habitual és emprar controladors d'ordre baix per tal d'assolir les especificacions. Encara que emprar controladors d'ordre reduït imposa algunes limitacions conceptuals, a la pràctica solen ser suficients per a moltes aplicacions. Uns dels controladors més emprats són els controladors de primer ordre, que es pot escriure de la següent forma:

$$C(z) = k_c \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

*Equació 15. Funció de transferència d'un controlador de primer ordre.*

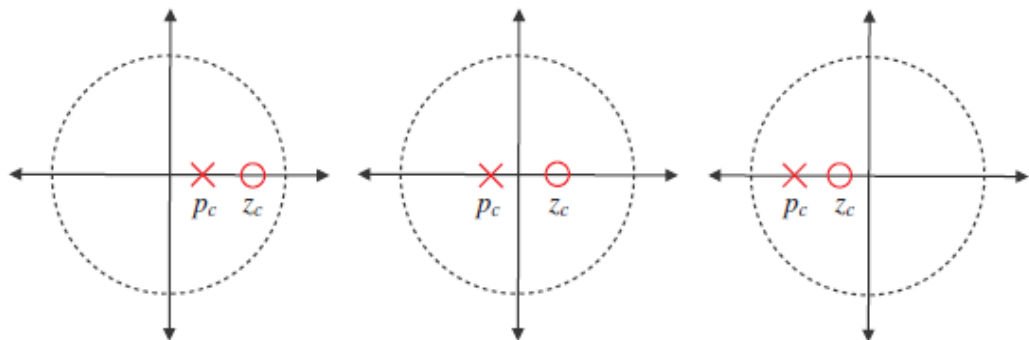
Aquests controladors presenten tres graus de llibertat,  $k_c$ ,  $z_c$  i  $p_c$ . Malauradament, el guany en contínua  $C(1)$  depèn de tots tres. Per aquest motiu, una manera alternativa d'escriure'l és:

$$C(z) = k_c \left( \frac{1 - p_c}{1 - z_c} \right) \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

*Equació 16. Funció de transferència d'un controlador de primer ordre.*

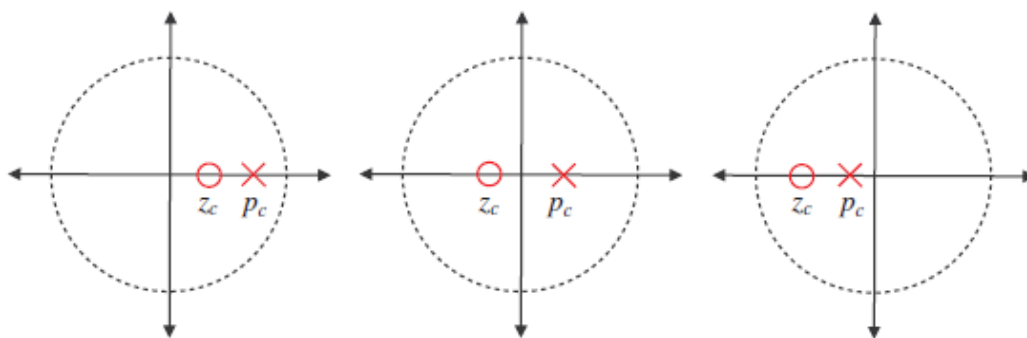
Cal adonar-se que ara  $C(1) = k_c$  i, per tant,  $k_c$  és directament el guany en contínua del sistema.

Aquests controladors s'acostumen a dissenyar amb un pol i el zero a l'interior del disc unitat (sistemes estables i de fase mínima) i, per tant,  $-1 < z_c < 1$  i  $-1 < p_c < 1$ .



*Il·lustració 12. Configuració relativa dels pols i zeros en els compensadors d'avanç de fase.*

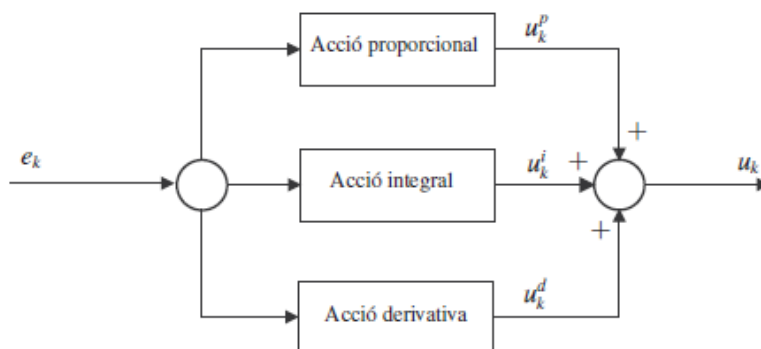
En el cas en què  $z_c > p_c$  (Il·lustració 12) els sistemes presenten sempre fase positiva i un perfil de guanys passaalt. Aquest tipus de controladors reben el nom de *compensadors d'avanç de fase*. Normalment, els compensadors d'avanç de fase s'utilitzen per aportar fase i per ampliar l'ample de banda d'un sistema. Un cas extrem d'aquest tipus de controlador és aquell que presenta el zero a  $z_c = 1$ ; aquest cas correspon a un element derivatiu.



Il·lustració 13. Configuració relativa dels pols i zeros en els compensadors de retard de fase.

En el cas en què  $z_c < p_c$  (Il·lustració 13) els sistemes presenten sempre fase negativa i un perfil de guanys passabaix. Aquest tipus de controladors reben el nom de *compensadors de retard de fase*. Normalment, els compensadors de retard de fase s'utilitzen per reduir l'ample de banda d'un sistema. Un cas extrem d'aquest tipus de sistema correspon a aquell que presenta el pol a  $p_c = 1$  i, per tant, introdueix un integrador en el llaç de control.

- **Controlador PID.** Els controladors PID són entre els més populars i més utilitzats a la pràctica. Solen escriure's en la forma genèrica mostrada a l'Equació 14 o com la suma de tres components o acció: l'acció proporcional (P), l'acció integral (I) i l'acció derivativa (D). Cadascuna d'aquestes accions veu l'error  $e_k$  i contribueix additivament a l'acció de control  $u_k$ .



Il·lustració 14. Estructura per accions del controlador PID.

Tot i que en la teoria aquests controladors s'implementen de diverses formes, a continuació únicament es presenten els mecanismes de sintonia analítica basats en l'assoliment d'especificacions.

- **Acció proporcional.** L'acció de control proporcional correspon a l'acció que aplicaria un controlador proporcional, és a dir:

$$u^p(t) = k_p e(t)$$

*Equació 17. Acció d'un controlador proporcional.*

On  $e(t)$  correspon al senyal d'error. Donat que es tracta d'una acció algebraica la discretització és:

$$u_k^p(t) = k_p e_k$$

*Equació 18. Acció d'un controlador proporcional discretitzada.*

Aquesta acció de control contribueix que els pols de llaç tancat estiguin en el lloc volgut, és a dir, que el sistema presenti la resposta temporal volguda.

- **Acció integral.** La majoria dels sistemes de control estan pensats per seguir senyals constants o senyals localment constants. Aquest tipus de senyals poden assimilar-se a graons i, per poder-los seguir sense error estacionari cal que el controlador incorpori un integrador.

En temps continu, l'acció integral es defineix de la forma següent:

$$u^i(t) = \int_0^t e(t) dt \rightarrow U^i(s) = \frac{1}{s} E(s)$$

*Equació 19. Acció integral en temps continu.*

Així, sigui un senyal de temps continu  $f(t)$ , la seva integral avaluada en els instants de mostratge és:

$$\Phi(kT) = \int_0^{kT} f(t) dt$$

*Equació 20. Acció integral en el temps de mostratge.*

Els sistemes mostrejats únicament reben informació en els instants de

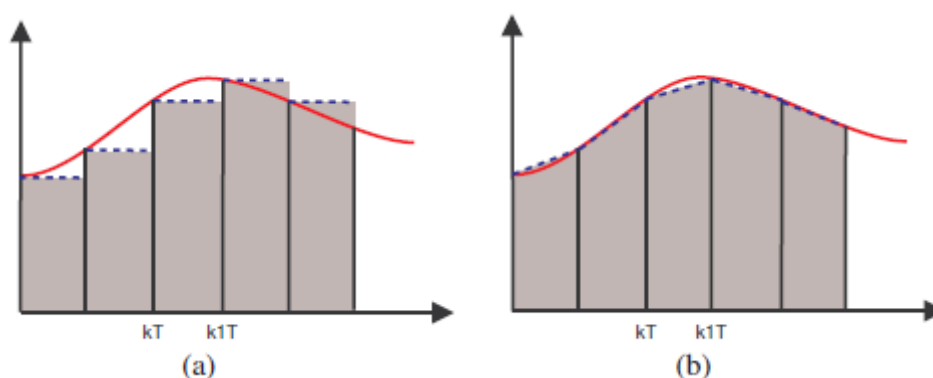
mostratge,  $kT$ . Per aquest motiu convé escriure la integral de la forma:

$$\Phi(kT) = \Phi((k-1)T) + \int_{(k-1)T}^{kT} f(t)dt$$

*Equació 21. Acció integral en el temps de mostratge.*

Com es pot observar, el valor de la integral en un instant de mostratge es pot calcular com la integral fins a l'instant de mostratge anterior, més la integral del senyal entre l'instant de mostratge anterior i l'instant de mostratge actual.

Atès que en els sistemes mostrejats únicament es disposa del valor de la variable en els instants de mostratge, cal buscar mecanismes per tal d'aproximar el valor de la integral a partir de la informació disponible. Per fer-ho, s'hi introdueixen dues opcions:



*Il·lustració 15. Aproximació de la integral. (a) Per rectangles. (b) Per trapezis.*

*Aproximació per rectangles.* Donat un senyal de temps continu,  $f(t)$ , la seva integral en un període es pot aproximar de la forma següent:

$$\int_{t-T}^T f(t)dt \approx f(t-T)T$$

*Equació 22. Acció integral aproximada per rectangles.*

A la *Il·lustració 15 (a)* es mostra una representació gràfica d'aquesta aproximació. Com es pot observar aquesta aproximació únicament utilitza informació del senyal a l'instant de mostratge anterior.

Emprant aquesta aproximació, s'obté l'equació en diferències:

$$u_k^i = u_{k-1}^i + e_{k-1}T$$

*Equació 23. Equació en diferències de l'acció integral aproximada per rectangles.*

On  $u_k^i$  és el valor de la integral,  $e_k$  el senyal que es vol integrar i  $T$  el període de mostratge. Si s'aplica la transformada en  $z$  a l'Equació 23 s'obté:

$$\frac{U^i(z)}{E(z)} = \frac{T}{z-1}$$

*Equació 24. Funció de transferència de l'acció integral aproximada per rectangles.*

Aquesta funció de transferència és de grau relatiu 1 i, per tant, en la resposta a l'impuls el primer valor és nul, presenta un pol a  $z = 1$  que correspon a l'integrador i no correspon a cap zero.

**Aproximació per trapezis.** Donat un senyal de temps continua,  $f(t)$ , la seva integral en un període també es pot aproximar de la forma següent:

$$\int_{t-T}^T f(t)dt \approx (f(t) + f(t-T))\frac{T}{2}$$

*Equació 25. Acció integral aproximada per trapezis.*

La Il·lustració 15 (b) mostra una representació gràfica d'aquesta aproximació. Com es pot observar, aquesta aproximació utilitza informació del valor del senyal a l'instant anterior i a l'instant actual.

Emprant aquesta aproximació, s'obté l'equació en diferències següent:

$$u_k^i = u_{k-1}^i + (e_k + e_{k-1})\frac{T}{2}$$

*Equació 26. Equació en diferències de l'acció integral aproximada per trapezis.*

On  $u_k^i$  és el valor de la integral,  $e_k$  el senyal que es vol integrar i  $T$  el període de mostratge. Si s'aplica la transformada en  $z$  a l'Equació 26 s'obté:

$$\frac{U^i(z)}{E(z)} = \frac{Tz + 1}{2z - 1}$$

*Equació 27. Funció de transferència de l'acció integral aproximada per trapezis.*

Aquesta funció de transferència és de grau relatiu 0 i, per tant, en la resposta a l'impuls el primer valor és no nul ( $T/2$ ); presenta un pol a  $z = 1$  que correspon a l'integrador i un zero a  $z = -1$ . Això correspon a un zero en la darrera freqüència en temps discret. És a dir, en la pulsació  $\omega_s = \pi/T$  rad/s, la resposta freqüencial s'anul·la.

Les dues aproximacions proposades incrementen el tipus del sistema i, per tant, contribueixen al fet que l'error en estat estacionari davant d'entrades graó sigui nul. Per tant, es poden emprar totes dues.

- **Acció derivativa.** Un senyal diferenciable,  $f(t)$ , es pot aproximar de la forma següent:

$$f(t+T) \approx f(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial t} T$$

*Equació 28. Acció derivativa aproximada.*

Això implica que la derivada es pot emprar per estimar el valor del senyal en el futur. Per aquest motiu, es sol dir que la derivada és una acció de control anticipativa, que afavoreix, en general, l'estabilitat del sistema en llaç tancat.

En temps continu, l'acció derivativa es defineix de la forma següent:

$$u^d(t) = \frac{de(t)}{dt} \rightarrow U^d(s) = sE(s)$$

*Equació 29. Acció derivativa en temps continu.*

La derivada és un element que, en temps continu, aporta  $90^\circ$  de fase a totes les freqüències. Això, en general, és bo perquè millora les característiques d'estabilitat relativa. En contrapartida, presenta un guany molt elevat a freqüències elevades; això és problemàtic, ja que s'amplifica el soroll d'altra freqüència.

En les implementacions digitals, cal aproximar la derivada a partir de la informació disponible en els instants de mostreig. Una manera de fer-ho és emprar el mètode d'Euler.

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT} \cong \frac{f(kT) - f((k-1)T)}{T}$$

*Equació 30. Acció derivativa en el temps de mostreig.*

Per tant, l'acció derivativa en el domini temporal es pot escriure de la forma:

$$u_k^d = (e_k - e_{k-1}) \frac{1}{T}$$

*Equació 31. Equació en diferències de l'acció derivativa.*

On  $e_k$  és el senyal al qual es vol extreure la derivada i  $T$  és el període de mostreig. Si s'aplica la transformada  $\mathcal{Z}$  a l'Equació 31 s'obté:

$$U^d(z) = (E(z) - E(z)z^{-1}) \frac{1}{T} = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} E(z)$$

*Equació 32. Funció de transferència de l'acció derivativa.*

Com es pot observar, presenta un zero a  $z = 1$  (derivador) i un pol a  $z = 0$  (un retard).

El *controlador PID* es defineix com la suma de les tres accions –proporcional, integral i derivativa–, ponderades per uns coeficients de proporcionalitat:

$$u^{PID} = k_p u^P + k_i u^I + k_d u^D$$

*Equació 33. Equació en diferències del controlador PID.*

Que en el domini transformat és:

$$PID = k_p + k_i \frac{Tz+1}{2z-1} + k_d \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} = \frac{(k_p T + k_d + \frac{k_i}{2} T^2) z^2 + (-k_p T + \frac{k_i}{2} T^2 - 2k_d) z + k_d}{T(z-1)z}$$

*Equació 34. Funció de transferència del controlador PID.*

S'observa que el controlador té dos pols, un a l'origen,  $z = 0$ , i l'altre a  $z = 1$



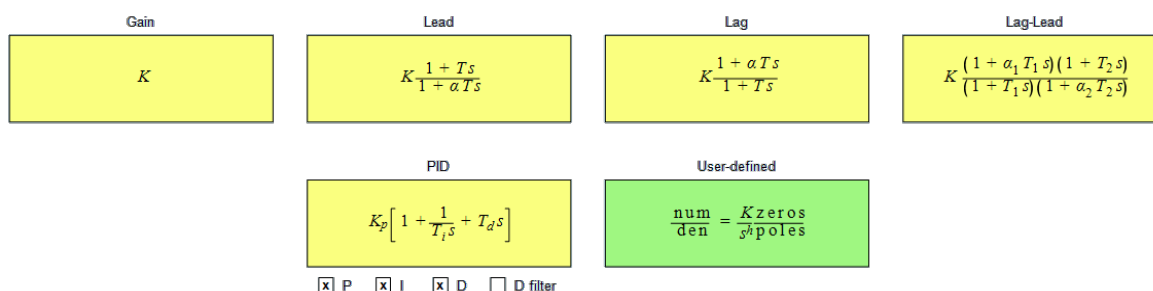
(integrador), i també té dos zeros que depenen dels valors dels paràmetres  $k_p$ ,  $k_i$  i  $k_d$ .

Encara que no és estrictament necessari, la majoria de mecanismes de sintonia assumeixen que els paràmetres són positius, és a dir,  $k_p > 0$ ,  $k_i > 0$  i  $k_d > 0$ .

El PID és un sistema de segon ordre; per tant, presenta més flexibilitat que els sistemes de primer ordre.

A la pràctica no sempre s'utilitzen les tres accions; hi ha casos que únicament s'utilitzen les accions proporcional i integral o proporcional i derivativa.

En el present projecte es poden emprar els controladors que apareixen en la *Il·lustració 16*. Tal com s'observa, no només es poden utilitzar els presentats, sinó que també existeix la possibilitat de crear-ne un a partir dels pols i zeros amb l'última opció.



*Il·lustració 16. Modelitzacions del controlador en l'aplicació.*

#### 6.4.7. Planta

La planta és un equip, conjunt o subsistema d'una màquina o planta que és objecte de control.

Tal com mostra la *Il·lustració 17* les aplicacions disposen de diferents tipus de modelitzacions per a la planta, així com la possibilitat de crear-ne una a partir de les seves característiques.

$\frac{K}{1+sT} e^{-s d}$	$\frac{K}{(1+sT)^2} e^{-s d}$	$\frac{K}{(1+s)(1+sT)^2} e^{-s d}$	$\frac{K}{(1+s)^n} e^{-s d}$
$\frac{K}{(1+s) \prod_{i=1}^3 (1+\alpha^i s)} e^{-s d}$	$\frac{K}{s(1+sT)} e^{-s d}$	$\frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)} e^{-s d}$	$K \frac{1-\alpha s}{(1+s)^3} e^{-s d}$
$\frac{K e^{-s d}}{(1+s)((sT)^2 + 1.4sT + 1)}$	$\frac{K \omega_n^2}{(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2)} e^{-s d}$	$\frac{K}{s^n} e^{-s d}$	$K \frac{1+Ts}{s^2} e^{-s d}$
$\frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{K \text{zeros}}{s^n \text{poles}} e^{-s d}$			

Il·lustració 17. Modelitzacions de la planta disponibles en l'aplicació.

## 6.5. Mapa de pols i zeros

L'estabilitat d'un sistema lineal de llaç tancat es determina a partir de la ubicació dels del llaç tancat en el pla  $s$ . Per caracteritzar l'estabilitat, no cal conèixer el valor dels pols; únicament cal conèixer la seva ubicació en el pla complex.

Quan en un procés s'incorpora un mostreig per impulsos, les variables complexes  $z$  i  $s$  queden relacionades a través de  $z = e^{Ts}$ .

La variable complexa  $s$  està formada d'una part real i una imaginària:

$$s = \sigma + j\omega$$

Equació 35. Variable  $s$ .

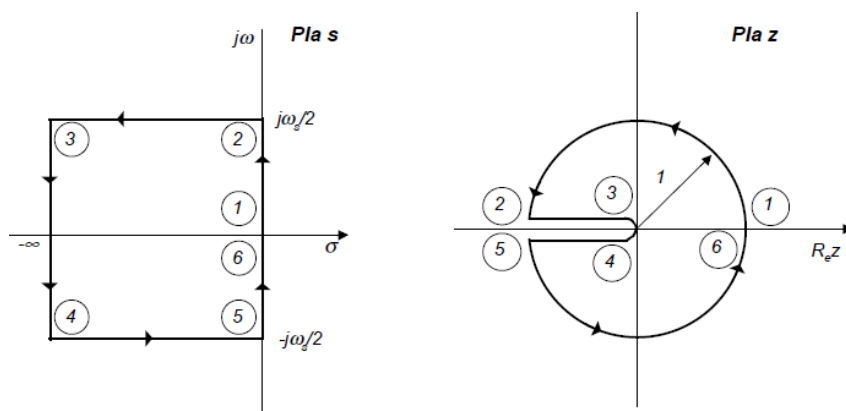
Aleshores:

$$z = e^{T(\sigma+j\omega)} = e^{T\sigma} e^{j(T\omega)} = e^{T\sigma} e^{j(T\omega+2\pi k)}$$

Equació 36. Variable  $z$ .

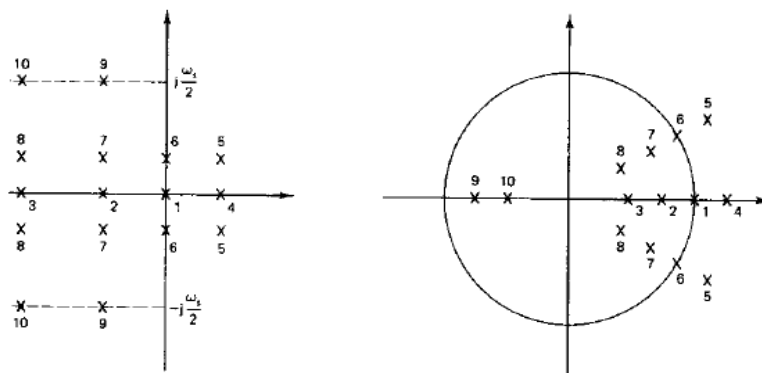
En aquesta última equació s'observa que els pols i els zeros en el pla  $s$ , on les freqüències difereixen en múltiples enters de la freqüència de mostratge  $\omega_s = 2\pi/T$ , on  $T$  és el període de mostratge, corresponen a les mateixes localitzacions en el pla  $z$ . Això significa que per cada valor de  $z$  existirà un nombre infinit de valors de  $s$ .

A la *Il·lustració 18* s'observa la transformació del semiplà esquerre de la banda primària, la corresponent als valors de  $j\omega$  des de  $-j\omega_s/2$  fins a  $j\omega_s/2$ , del pla  $s$  al pla  $z$ .



*Il·lustració 18. Transformació de la banda primària al pla  $z$ .*

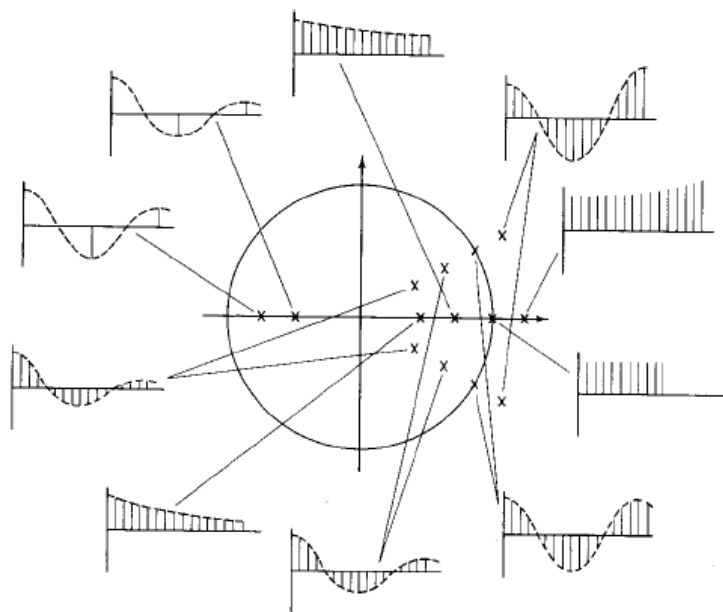
Atès que la totalitat del semiplà esquerre del pla  $s$  correspon a l'interior del cercle unitari en el pla  $z$ , la totalitat del semiplà dret del pla  $s$  correspon a l'exterior del cercle unitari del pla  $z$ . A la *Il·lustració 19* es mostra la correspondència dels pols entre el pla  $s$  i el pla  $z$ .



*Il·lustració 19. Correspondència dels pols entre el pla  $s$  i el pla  $z$ .*

El sistema serà estable si els pols de laïç tancat en el pla  $z$  es troben a l'interior del cercle de radi unitat. Qualsevol pol de laïç tancat a l'exterior del cercle fa inestable el sistema.

Si un pol simple es presenta en  $z = 1$ , aleshores el sistema es converteix en marginalment estable. El mateix succeeix si un sol parell de pols complexos conjugats es presenta sobre el cercle unitari al pla  $z$ . Per contra, qualsevol pol múltiple sobre el cercle unitari desestabilitza el sistema.



*Il·lustració 20. Resposta transitòria segons la posició dels pols en el pla z.*

La *Il·lustració 20* mostra les característiques de la resposta transitòria segons la posició dels pols en el pla z.



## 7. Resposta temporal en temps continu

### 7.1. Contingut teòric

#### 7.1.1. Introducció

La teoria de control automàtic té com a punt de partida l'establiment de les relacions existents entre variables externes de sortida i entrada al sistema. Es considera el sistema com un bloc que transfereix i transforma la informació continguda en les variables d'entrada en la de les variables de sortida. Si aquestes relacions existents i les variables són funció del temps, el sistema és qualificat com a dinàmic o de temps continu. Si la magnitud d'una o més variables pot conèixer-se únicament en certs instants de temps es diu que el sistema és de temps discret o de dades mostrejades.

Degut a la complexitat analítica, és comú analitzar el comportament temporal de sistemes de primer i segon ordre, estenent els resultats a sistemes d'ordre superior. Seguint aquesta filosofia, primerament es presentarà la resposta temporal en temps continu de sistemes de primer i segon ordre i, a continuació, s'estudiarà l'efecte d'afegir un zero a la funció de transferència per acabar generalitzant els conceptes al cas de sistemes genèrics.

#### 7.1.2. Representació interna i externa

Les tècniques desenvolupades amb la teoria clàssica de control resulten especialment útils per al tractament de sistemes *SISO* (*Single Input Single Output*, és a dir, una sola entrada, una sola sortida). No obstant això, per a l'estudi de sistemes més complexos és convenient considerar variables internes i les seves relacions amb les externes amb la finalitat de facilitar la tasca.

Mentre que la descripció externa estableix una relació funcional explícita entre els senyals d'entrada i de sortida, que es pot expressar en forma de funció de transferència, la descripció interna es basa en el concepte d'estat d'un sistema dinàmic i presenta els següents avantatges respecte l'externa:

- És aplicable a sistemes multivariables en què hi ha un elevat grau d'interacció entre les variables del sistema.
- És aplicable a sistemes amb relacions no-lineals entre les variables involucrades en la seva dinàmica.
- És aplicable a sistemes els paràmetres varien en el temps a velocitats comparables amb l'evolució de les seves variables.
- És aplicable a sistemes complexos de control, amb un gran nombre de variables internes que condicionen el comportament futur de la sortida.

### 7.1.3. Concepte d'estat

S'entén per *estat* d'un sistema dinàmic el conjunt mínim de variables tals que si es coneix el seu valor en un instant  $t_0$  així com les entrades per a  $t \geq t_0$ , queda determinat per complet el comportament del sistema per a qualsevol temps futur  $t \geq t_0$ , si el sistema és determinista (l'atzar no està involucrat en els futurs estats del sistema).

El conjunt mínim de variables que defineixen l'estat d'un sistema dinàmic es coneix com a *variables d'estat*. Si es requereixen almenys  $n$  variables  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$  per a descriure completament el comportament d'un sistema dinàmic, dites  $n$  variables són un conjunt de variables d'estat. En general, el conjunt de variables dependents que constitueixen l'estat pot escollir-se de diferents maneres.

Aquestes  $n$  variables que configuren l'estat s'acostumen a agrupar en un vector que es denomina *vector d'estat* del sistema dinàmic. Per tant, un vector d'estat és aquell que determina de manera única l'estat d'un sistema dinàmic  $x(t)$  per a qualsevol temps  $t \geq t_0$ , una vegada que es coneix l'estat en  $t = t_0$  i l'entrada  $u(t)$  per  $t \geq t_0$ .

S'anomena *espai d'estats* a l'espai de  $n$  dimensions els eixos de coordenades del qual corresponen a les variables d'estat  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ . Qualsevol estat es representa mitjançant un punt en l'espai d'estats, de forma que l'evolució dinàmica d'un sistema és una trajectòria que parteix del punt inicial (determinant pel valor del vector d'estat en  $t = t_0$ ) i arriba fins al punt final, que habitualment és un estat d'equilibri associat a una posició o oscil·lació constant (règim estacionari o règim permanent).

#### 7.1.4. Equacions del model d'estat

La descripció de la representació en l'espai d'estat s'anomena *realització en l'espai d'estats* i ve donada per:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

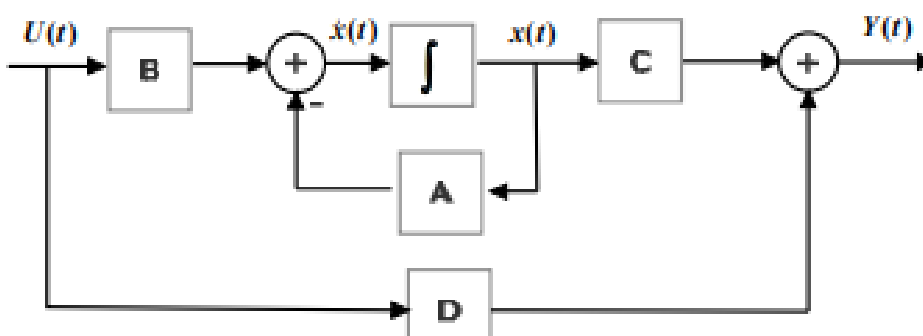
*Equació 37. Equació d'estat.*

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

*Equació 38. Equació de sortida.*

La primera equació és la denominada *equació d'estat* i representa la dinàmica de l'evolució de l'estat del sistema i la segona s'anomena *equació de sortida*. El vector  $x(t)$  és el *vector d'estat* i les seves components són les *variables d'estat*;  $u(t)$  i  $y(t)$  són l'entrada i la sortida del sistema respectivament.

Si el sistema és de  $n$ -èssim ordre amb  $m$  sortides i  $p$  entrades, les dimensions de les matrius del model en l'espai d'estats són:  $A = n \times n$ ;  $B = n \times p$ ;  $C = m \times n$ ;  $D = m \times p$  (generalment nul·la). En sistemes lineals invariants en el temps, les matrius  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  tenen tots els seus coeficients constants. A més, es tractarà el cas de sistemes causals o estrictament propis i per tant es considerarà que  $D = 0$ .



*Il·lustració 21. Representació interna d'un sistema continu.*

La representació d'estats no és única, sinó que poden trobar-se infinites, equivalents entre si i igualment vàlides per a la descripció del sistema. A la *Il·lustració 21* es mostra, de



manera esquemàtica la representació interna d'un sistema.

### 7.1.5. Funció de transferència i model d'estat

L'expressió d'un sistema lineal i invariant és:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

*Equació 39. Expressió d'un sistema lineal i invariant.*

Per aproximar el model al de la funció de transferència s'apliquen les transformades de Laplace i s'estableix una relació entre l'entrada i la sortida:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

*Equació 40. Relació de l'entrada amb la sortida.*

On  $x(0)$  és el vector de condicions inicials. Si  $x(0) = 0$ , llavors:

$$(sI - A) X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) = C (sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = [C (sI - A)^{-1} B + D] U(s)$$

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D$$

*Equació 41. Funció de transferència.*

On  $G(s)$  és una matriu de funcions de transferència de dimensions  $p \times m$ . Els diferents elements d'aquesta matriu són quocients de polinomis. D'aquesta manera s'obté una relació entre les matrius de la descripció d'espai d'estats i la funció de transferència.

### 7.1.6. Sistema de primer ordre sense zeros

La dinàmica dels sistemes lineals de temps continu invariants en el temps de primer ordre sense zeros pot definir-se a partir de les equacions diferencials de primer ordre de la forma:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$$

*Equació 42. Equació diferencial d'un sistema de primer ordre.*

On  $y(t)$  i  $u(t)$  són la sortida i l'entrada del sistema respectivament. La funció de transferència representativa es pot escriure de la següent forma:

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

*Equació 43. Funció de transferència d'un sistema de primer ordre sense zeros.*

En la que el polinomi del denominador es denomina *polinomi característic*  $J(s)$ , l'única arrel del qual (solució de l'equació característica  $J(s) = 0$ ) s'anomena pol de la funció de transferència, situat en  $s = -1/\tau$ . Els dos paràmetres que caracteritzen la funció de transferència d'un sistema de primer ordre són:

- **k**. Guany estàtic o guany canònic del sistema.
- **$\tau$** . Constant de temps.

La resposta temporal va lligada a un cert senyal d'excitació, que tradicionalment acostuma a ser un esglaó ( $U(s) = U_e/s$  amb  $U_e = 1$  en el cas de l'esglaó unitari). Per tant, utilitzant la transformada de Laplace es pot obtenir la resposta temporal d'un sistema de primer ordre quan el senyal d'entrada és un esglaó:

$$y(t) = kU_e \left( \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\tau}{\tau s + 1} \right\} \right) = kU_e \left( 1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right), \quad t \geq 0$$

*Equació 44. Resposta temporal d'un sistema de primer ordre davant d'una entrada esglaó.*

### 7.1.7. Sistema de segon ordre sense zeros

Els sistemes de segon ordre es poden descriure mitjançant una equació diferencial normalitzada del segon ordre del tipus:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = k\omega_n^2 u(t)$$

*Equació 45. Equació diferencial de segon ordre.*

On  $y(t)$  i  $u(t)$  són la sortida i l'entrada del sistema respectivament. Existeixen sistemes amb dinàmiques de segon ordre pures o formades per la combinació de dos sistemes de primer ordre en sèrie (producte de dos funcions de transferència de primer ordre). La funció de transferència estàndard d'un sistema de segon ordre ve donada per:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

*Equació 46. Funció de transferència d'un sistema de segon ordre sense zeros.*

En la que el polinomi del denominador es denomina polinomi característic  $J(s)$ , les arrels del qual (solució de l'equació característica  $J(s) = 0$ ) són els pols de la funció de transferència, que en aquest cas poden ser reals o complexos conjugats. Els paràmetres que defineixen la funció de transferència són:

- **k.** Guany estàtic o guany canònic del sistema.
- **$\zeta$ .** Factor d'esmortiment relatiu del sistema (adimensional), que determina la resposta transitòria.
- **$\omega_n$ .** Freqüència natural no amortida (rad/s), que correspon a la freqüència a la que oscil·laria el sistema si no existís esmortiment ( $\zeta = 0$ ).

La resposta temporal quan l'entrada té forma d'esglaió d'amplitud  $U_e$  ( $U(s) = U_e/s$ ), s'ha d'estudiar per als diferents valors de  $\zeta$ :

- **Sistema subesmorteït.** Per al cas  $0 \leq \zeta \leq 1$  s'obté que els pols del sistema són complexos conjugats ( $s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$  i  $s_1^* = -\zeta\omega_n - j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ ) i la resposta temporal a entrada esglaió és:

$$y(t) = kU_e \left[ 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right) \right], \quad t \geq 0$$

*Equació 47. Resposta temporal d'un sistema de segon ordre subesmorteït davant d'una entrada esglaió.*

On  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$  és la freqüència natural esmorteïda. Es pot observar com la component complexa dels pols produeix una resposta temporal amb sinus i cosinus que donen lloc a oscil·lacions que s'esmoreeixen amb l'exponencial. El producte  $\sigma = \xi\omega_n$  es denomina factor d'amortiment, que és una constant que determina les propietats d'esmortiment d'un sistema.

- **Sistema sobreesmorteït.** Quan el factor d'amortiment relatiu és  $\xi \geq 1$ , els pols del sistema de segon ordre seran reals ( $s_1 = -1/\tau_1 = -\xi\omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2-1}$  i  $s_2 = -1/\tau_2 = -\xi\omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2-1}$ ). La funció de transferència en aquest cas ve donada per:

$$G(s) = \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

*Equació 48. Funció de transferència d'un sistema de segon ordre sobreesmorteït.*

On  $\tau_2$  és la constant del temps associada al pol més proper a l'eix imaginari, que provoca l'exponencial més lenta ( $\tau_2 > \tau_1$ ) i la resposta temporal es pot obtenir per tant com la combinació de dos sistemes de primer ordre:

$$y(t) = kU_e \left[ 1 - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right], \quad t \geq 0$$

*Equació 49. Resposta temporal d'un sistema de segon ordre sobreesmorteït davant d'una entrada esglaió.*

- **Sistema críticament esmorteït.** Quan  $\xi = 1$ , les dues arrels són iguals  $s_1 = s_2$  ( $\tau_1 = \tau_2$ ). La seva funció de transferència ve donada per:

$$G(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)^2}$$

*Equació 50. Funció de transferència d'un sistema de segon ordre críticament esmorteït.*

La resposta davant d'una entrada esglaó presenta la següent expressió:

$$y(t) = kU_e \left( 1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} \right), \quad t \geq 0$$

*Equació 51. Resposta temporal d'un sistema de segon ordre críticament esmorteït davant d'una entrada esglaó.*

- **Sistema críticament estable.** Com es pot observar a l'Equació 47, quan  $\zeta = 0$ , els dos pols complexos conjugats es troben sobre l'eix imaginari (amb part real nul·la) i s'obté una resposta amb una oscil·lació mantinguda donada per:

$$y(t) = kU_e (1 - \cos(\omega_n t)), \quad t \geq 0$$

*Equació 52. Resposta temporal d'un sistema de segon ordre críticament estable davant d'una entrada esglaó.*

- **Sistema inestable.** En el cas  $\zeta < 0$  el sistema serà inestable. Tindrà dos pols complexos conjugats amb part real en el semiplà dret si  $-1 < \zeta < 0$  (resposta inestable oscil·latòria o bé dos pols reals en el semiplà dret si  $\zeta \leq -1$  (resposta inestable de tipus exponencial).

#### 7.1.8. Efecte d'un zero en un sistema de primer ordre

La funció de transferència i la resposta temporal d'un sistema de primer ordre quan l'entrada és un esglaó són les mostrades a l'Equació 43 i l'Equació 44 respectivament. Existeixen sistemes dinàmics lineals de primer ordre que poden ser descrits per equacions diferencials que depenen de la derivada de l'entrada i no només del seu valor:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \left( \beta \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right)$$

*Equació 53. Equació diferencial d'un sistema de primer ordre.*

On  $y(t)$  i  $u(t)$  són la sortida i l'entrada del sistema respectivament. La funció de transferència representativa d'aquest tipus de sistemes es pot escriure de la següent manera:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k \frac{\beta s + 1}{\tau s + 1}$$

*Equació 54. Funció de transferència d'un sistema de primer ordre amb un zero.*

Aquesta funció de transferència presenta un polinomi de primer grau en el numerador i polinomi de primer grau en el denominador. L'arrel del polinomi del denominador ( $s = -1/\tau$ ), rep el nom de pol del sistema, mentre que la del polinomi del numerador ( $s = -1/\beta$ ), rep el nom de zero del sistema.

La resposta temporal del sistema a l'aplicar un esglaió d'amplitud  $U_e$  ( $U_e = 1$  en cas d'esglaió unitari) en  $t = 0$  pot escriure's com la suma de la resposta del sistema amb  $\beta = 0$  (la que té el sistema sense el zero descrita per l'Equació 44,  $y_1(t)$ ) més la derivada de dita resposta ponderada per  $\beta$ :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \frac{U_e}{s}\right\} = y_1(t) + \beta \frac{dy_1(t)}{dt} = kU_e \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{\beta}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t}\right), \quad t \geq 0$$

$$y(t) = kU_e \left(1 + \left(\frac{\beta}{\tau} - 1\right) e^{-\frac{1}{\tau}t}\right), \quad t \geq 0$$

*Equació 55. Resposta temporal d'un sistema de primer ordre amb un zero davant d'una entrada esglaió.*

Com es pot observar, el zero no afecta a l'estabilitat del sistema, ja que  $\beta$  no apareix en l'exponencial de l'Equació 54 i únicament modifica la resposta transitòria.

#### 7.1.9. Efecte d'un zero en un sistema de segon ordre

La funció de transferència d'un sistema de segon ordre és la mostrada a l'Equació 46. Si es considera, en aquesta funció de transferència, la presència d'un zero amb constant de temps  $\beta$  (per tant, situat en el pla complex  $s = 1/\beta$ ), s'obté que:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2(\beta s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

*Equació 56. Funció de transferència d'un sistema de segon ordre amb un zero.*

Analitzant la nova funció de transferència,  $G(s)$ , es pot observar que és possible separar-

les en dos termes basats en la funció de transferència sense el zero:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \beta s \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

*Equació 57. Funció de transferència d'un sistema de segon ordre amb un zero.*

La resposta temporal del sistema a l'aplicar un esglaió d'amplitud  $U_e$  ( $U_e = 1$  en cas d'esglaió unitari), sent  $y_2(t)$  la resposta del sistema sense el zero representat per l'*Equació 46* i tenint en compte que  $y_2(0) = 0$  és:

$$y(t) = y_2(t) + \beta \frac{dy_2(t)}{dt}$$

*Equació 58. Resposta temporal d'un sistema de segon ordre amb un zero davant d'una entrada esglaió.*

De l'*Equació 58* se'n pot deduir que la influència d'un zero en la resposta temporal d'un sistema de segon ordre que l'entrada és un senyal esglaió ve donada per la resposta temporal original del sistema més la derivada de dita resposta ponderada per una constant  $\beta$ . Si el sistema és sobreesmorteït, la representació de la funció de transferència del sistema de segon ordre passa a ser:

$$G(s) = \frac{k(\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

*Equació 59. Funció de transferència d'un sistema de segon ordre sobreesmorteït amb un zero.*

On  $\tau_1$  i  $\tau_2$  són les constants de temps associades als dos pols reals. En aquest cas la resposta es veurà afectada per la posició relativa del zero respecte als dos pols reals. Cal recordar que quan un zero es situa a prop d'un pol es cancel·len la majoria dels efectes dels dos elements en la resposta. Si  $\tau_1 \neq \beta$ ,  $\tau_2 \neq \beta$  i  $\tau_2 > \tau_1 > 0$  s'obté la resposta a entrada esglaió que es mostra:

$$y(t) = k \left[ 1 - \frac{\tau_2 - \beta}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{\tau_1 - \beta}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right], \quad t \geq 0$$

*Equació 60. Resposta temporal d'un sistema de segon ordre sobreesmorteït amb un zero davant d'una entrada esglaió.*

Tant en el cas subesmorteït com en el sobreesmorteït, la derivada de la sortida no és nul·la a  $t = 0$ , fet que sí succeeix en sistemes de segon ordre sense zeros. Les respostes influïdes per la presència d'un zero es classifiquen en dos tipus segons si el zero és positiu o negatiu. Quan  $\beta > 0$ , el zero es troba en el semiplà esquerre del pla  $s$  i la resposta es coneix com de fase mínima, on la resposta temporal es veurà afectada veient augmentada la rapidesa en la resposta i la sobreoscil·lació. Per tant, quan  $\beta < 0$ , el zero es troba en el semiplà dret del pla  $s$  i la resposta es coneix com de fase no mínima, on ara el terme que acompanya a la derivada  $dy_2(t)/dt$  en l'Equació 58 es resta de la resposta temporal  $y_2(t)$  provocant una resposta inversa a la direcció original de la resposta del sistema durant un període determinat de temps.

A continuació es distingeixen un seguit de casos:

**$\beta < 0$ .** El sistema presenta *resposta inversa*, que és més pronunciada com més s'apropa el zero  $-1/\beta$  al pla complex.

**$\beta > \tau_2 > \tau_1$ .** La resposta presenta una *sobreoscil·lació* més pronunciada com més a prop estigui el zero negatiu de l'origen respecte a la posició dels pols.

**$\beta \approx \tau_2 \gg \tau_1$ .** El sistema pot aproximar-se a un de primer ordre, tot i que a causa del parell pol-zero deprecia es genera un transitori de petita magnitud.

**$\tau_2 > \beta > \tau_1$ .** La presència del zero tendeix a accelerar la resposta respecte al cas sense zero. Si el zero està a prop del pol més allunyat de l'origen, la resposta cada vegada s'aproximarà més a la d'un sistema de primer ordre amb constant de temps  $\tau_2$ .

**$\tau_2 > \tau_1 > \beta$ .** A l'allunyar el zero de l'origen del pla complex i dels pols, la resposta tendeix a la que tindria el sistema de segon ordre amb els mateixos pols però sense zero.

#### 7.1.10. Sistema genèric

En els apartats anteriors s'ha analitzat la resposta temporal de sistemes lineals invariants en el temps de primer i segon ordre, així com l'efecte d'introduir un zero en la seva funció de transferència. A continuació s'analitzarà també la presència de:



- **Integradors.** Pols en l'origen,  $s = 0$ . La seva funció de transferència ve donada per  $G(s) = 1/s$ .
- **Derivadors.** Zeros en l'origen,  $s = 0$ . La seva funció de transferència ve donada per  $G(s) = s$ .
- **Temps de retard,  $t_r$ .** Retard temporal pur que provoca que el que succeeixi en un temps  $t$  en un punt del sistema succeeixi, en un altre punt del sistema, passat un temps  $t + t_r$ . Així doncs, l'efecte que produeix és un desplaçament temporal de la resposta del sistema.

A més, quan s'obtenen models de sistemes físics o quan s'implementen sistemes de control de llaç tancat, poden aparèixer sistemes amb un ordre superior al tractat fins al moment (l'ordre del model és el grau del polinomi del denominador de la funció de transferència o polinomi característic). En molts casos, la resposta de dits sistemes es poden assimilar a la de sistemes més senzills. En aquests casos, es pot comprovar que la resposta de sistemes d'ordre superior es poden construir a partir de les respostes conegudes de sistemes de primer i segon ordre.

Un sistema d'ordre  $n$  es pot representar a través de la següent equació diferencial d'ordre  $n$ :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u_r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du_r(t)}{dt} + b_0 u_r(t)$$

Equació 61. Equació diferencial d'un sistema d'ordre  $n$ .

On  $y(t)$  és la sortida del sistema,  $u(t)$  l'entrada i  $u_r(t) = u(t - t_r)$ . Aplicant la transformada de Laplace amb condicions inicials nul·les s'obté la següent funció de transferència:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Equació 62. Funció de transferència d'un sistema d'ordre  $n$ .

On el terme exponencial representa el temps de retard. La condició  $m \leq n$  és necessària

per a garantir la causalitat del sistema i que el model tingui sentit físic (en cas contrari la sortida del model en l'instant actual dependria del futur). Les arrels del numerador de la funció de transferència són els zeros i les del denominador són els pols. Si es factoritzen els polinomis del numerador i del denominador es pot obtenir:

$$G(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} e^{-t_r s}$$

*Equació 63. Funció de transferència d'un sistema d'ordre n.*

Si s'aplica el teorema del valor final a l'Equació 63, s'obté el guany estàtic de  $G(s)$  que és:

$$G(0) = k \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)}$$

*Equació 64. Guany estàtic d'un sistema d'ordre n.*

És important destacar que el teorema del valor final només pot ser aplicat a sistemes estables.

A continuació s'analitzen alguns dels casos més intuïtius i senzills. La resposta del sistema a un esglaó unitari, en el cas en què es consideren només pols reals diferents, sense zeros ni temps de retard ve donada per:

$$Y(s) = \frac{k}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i}$$

*Equació 65. Resposta d'un sistema a un esglaó.*

On  $c_i$  és el residu del pol en  $s = p_i$  (si el sistema té pols múltiples, aleshores  $Y(s)$  tindrà termes de pols múltiples). En el cas estable i estrictament causal (tots els pols en el semiplà esquerre,  $p_i < 0$  i grau del denominador major que el del numerador), els residus determinen la importància relativa de cada component de la sortida. Si un pol s'ubica lluny de l'origen, el residu pot ser petit (en funció de les posicions relatives dels pols i els zeros), indicant que la seva influència sobre la sortida és petita i dura un temps molt curt (tenint en aquest cas un pol poc dominant). D'aquesta manera, els pols dominants són els que es troben més propers a l'eix imaginari i permeten reduir l'ordre del model al no considerar l'efecte dels pols allunyats de l'origen.

Si es tracta el cas en què no hi ha temps de retard ni zeros i els pols de  $Y(s)$  estan formats per pols reals i parells de pols complexos conjugats (que produeixen termes de segon ordre en  $s$ ), s'obté una forma factoritzada de l'equació d'ordre superior formada per termes de primer i segon ordre:

$$Y(s) = \frac{k}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i} + \sum_{l=1}^r \frac{d_l(s + \xi_l \omega_{nl}) + f_l \omega_{nl} \sqrt{1 - \xi_l^2}}{s^2 + 2\xi_l \omega_{nl}s + \omega_{nl}^2}; \quad (q + 2r = n)$$

*Equació 66. Resposta d'un sistema a un esglaó.*

On se suposa que els pols són diferents. En el cas que existeixin pols múltiples, també apareixeran termes de pols múltiples en  $Y(s)$ . D'aquesta equació es pot transferir que la resposta d'un sistema d'ordre superior sense temps de retard ni zeros a una entrada esglaó unitari és la superposició de respostes de sistemes de primer i segon ordre.

$$y(t) = k + \sum_{i=1}^q c_i e^{p_i t} + \sum_{l=1}^r d_l e^{-\xi_l \omega_{nl} t} \cos\left(\omega_{nl} \sqrt{1 - \xi_l^2} t\right) + \sum_{l=1}^r f_l e^{-\xi_l \omega_{nl} t} \sin\left(\omega_{nl} \sqrt{1 - \xi_l^2} t\right)$$

$$t \geq 0$$

*Equació 67. Resposta temporal d'un sistema a un esglaó.*

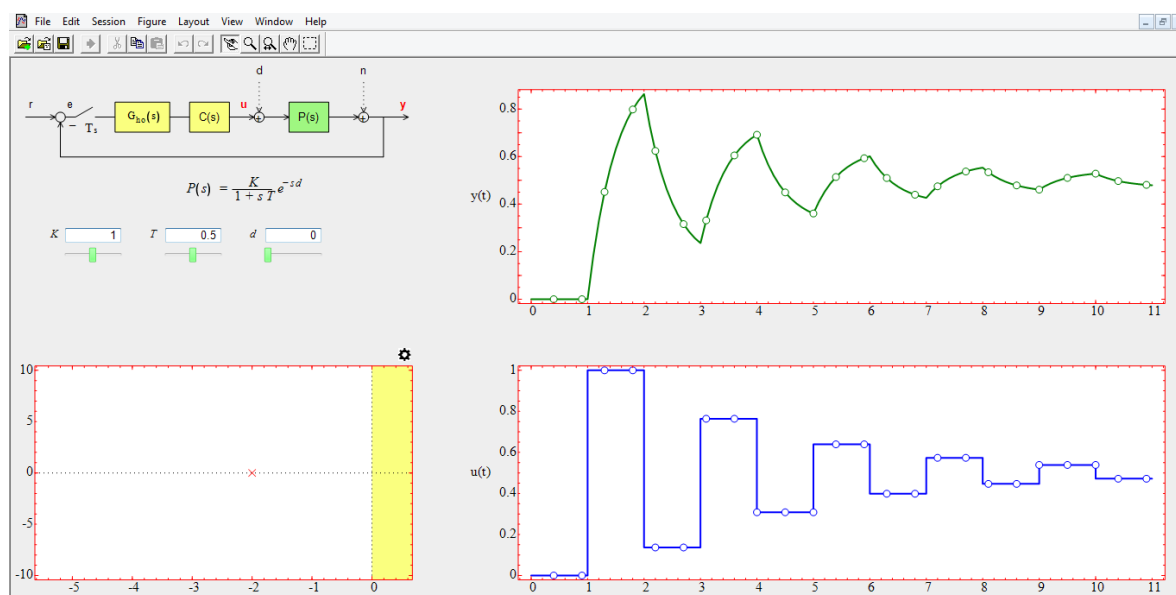
En sistemes que tinguin zeros i/o temps de retard es poden obtenir expressions i conclusions similars. Tot i que aquí no es presenten, s'han implementat altres casos a partir de la descripció de l'espai d'estats.

## 7.2. Pantalla

L'objectiu principal d'aquesta aplicació és analitzar la resposta temporal de sistemes lineals, invariants en el temps i genèrics, entenent com a tal aquells que poden tenir un nombre arbitrari de pols (inclosos els pols a l'origen o integradors), un nombre arbitrari de zeros (inclosos els zeros a l'origen o derivadors purs) i temps de retard.

L'eina garanteix que les funcions de transferència siguin pròpies o causals (el grau del polinomi del denominador o polinomi característic ha de ser més gran o igual que el grau del polinomi del numerador).

L'eina és interactiva i està dividida en quatre àrees principals, tal com mostra la *Il·lustració 22*:



*Il·lustració 22. Pantalla de l'aplicació.*

**Diagrama de blocs.** A la part superior esquerra es presenta el diagrama de blocs de tipus 1 que es mostra en la *Il·lustració 3*. Tot i que per defecte apareix la realimentació negativa activada, aquesta es pot desactivar fent clic sobre la línia que la representa, passant a ser aquesta una línia discontinua.

Pel que fa a les entrades, la referència és un graó unitari i les pertorbacions es mantenen desactivades en tot moment.

El controlador és constant i de valor  $C(z) = k$  sent  $k$  un valor variable que es pot modificar polsant sobre el caixetí que representa el controlador i fent variar la barra mòbil que apareix en la part inferior.

La planta,  $P(z)$ , es pot modelitzar de diferents maneres, tal com es mostra en la *Il·lustració 17*. En prémer el bloc corresponent apareix una finestra que permet triar la forma desitjada i se'n poden variar els paràmetres mitjançant barres mòbils. Si és

necessari dissenyar una planta, caldrà fer ús tant de les barres mòbils com del mapa de pols i zeros per tal d'afegir-los, tot i que per variar el seu valor o eliminar-los només caldrà fer clic o doble clic en la funció de transferència, respectivament.

**Mapa de pols i zeros.** A la part inferior esquerra es mostra un editor de pols i zeros per a configurar la funció de transferència del sistema. Si es tracta d'una funció predefinida, només se'n podrà variar el valor dels pols i zeros, en cas contrari, a més, se'n podran afegir i eliminar tants pols i zeros com es desitgi, només caldrà desplaçar els elements del repositori al mapa o viceversa.

Els pols reals es representen amb una creu vermella (**x**), els integradors també tot i que es mostren a la part superior com una **I** i els complexos de la mateixa manera, però en negreta (**x**). De la mateixa manera, els zeros reals es representen amb un cercle vermell (**o**), els derivadors també tot i que es mostren en la part superior com una **D** i els complexos de la mateixa manera però en negreta (**o**). En passar el ratolí per sobre dels pols i zeros, s'indica la seva posició.

Per últim, a la part superior dreta apareix una icona que permet bloquejar o variar l'escala del mapa de pols i zeros.

**Resposta temporal.** En la zona superior dreta de l'aplicació s'inclou, en color verd, la gràfica de la resposta temporal del sistema representat en temps continu. Se'n pot canviar el període de mostratge d'aquesta en desplaçar els cercles que es troben sobre la línia que representa la resposta.

**Senyal de control.** En la zona inferior dreta de l'aplicació s'inclou, en color blau, la gràfica del senyal de control. Se'n pot canviar el període de mostratge d'aquest en desplaçar els cercles que es troben sobre la línia que representa el senyal de control.

## 7.3. Exemples

### 7.3.1. Sistema estable

El primer exemple representa un sistema estable fortament subesmorteït, el controlador

del qual ve definit per:

$$C(s) = K = 0,6$$

Equació 68. Controlador de l'exemple 1.

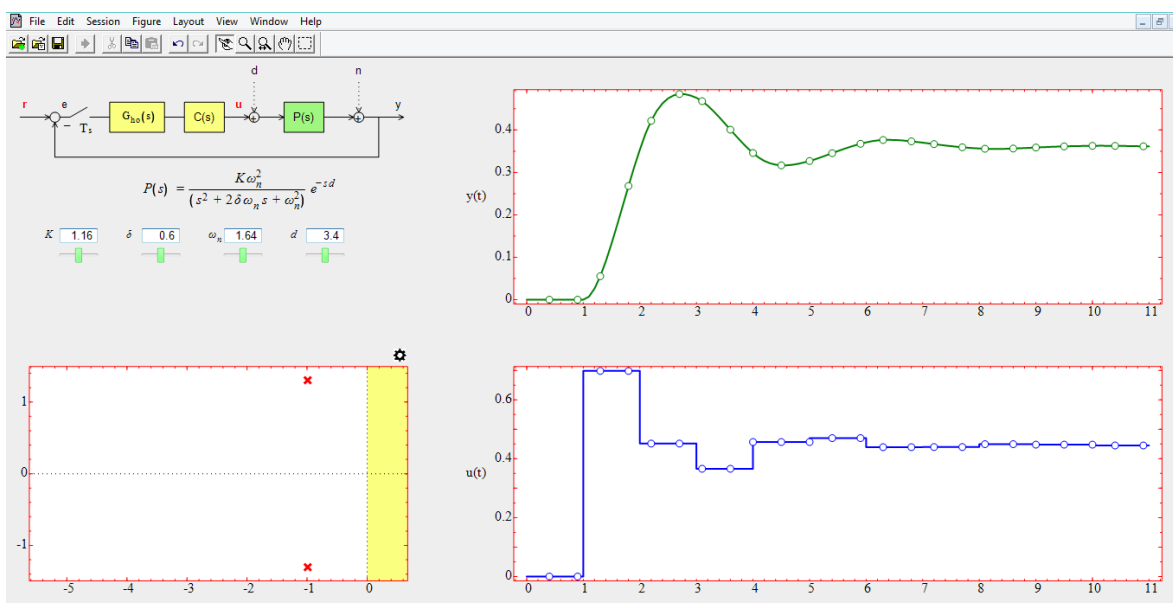
La planta ve donada per:

$$P(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-sd} = \frac{1,16 \cdot 1,64^2}{s^2 + 2 \cdot 0,6 \cdot 1,64 \cdot s + 1,64^2} e^{-3,4s}$$

Equació 69. Planta de l'exemple 1.

Al mapa de pols i zeros s'observa un parell de complexos a  $-0,99 + j1,3$  i  $-0,99 - j1,3$ .

La resposta temporal i el senyal de control, en verd i blau respectivament, es mostren a la dreta de la Il·lustració 23.



Il·lustració 23. Pantalla de l'exemple 1.

### 7.3.2. Sistema inestable

El segon exemple representa un sistema inestable, amb el controlador definit per l'expressió:

$$C(s) = K = 1,5$$

Equació 70. Controlador de l'exemple 2.

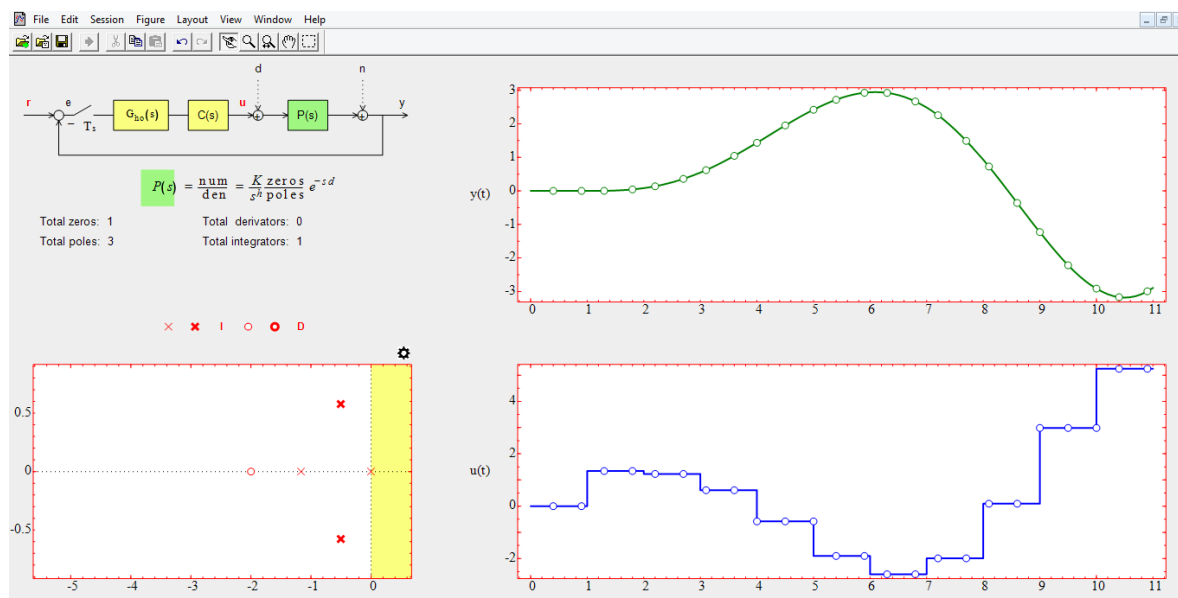
Es defineix la funció de transferència a partir de les seves característiques, seguint l'estructura mostrada en l'Equació 71:

$$P(s) = \frac{K \text{ zeros}}{s^h \text{ pols}} e^{-sd}$$

Equació 71. Planta de l'exemple 2.

Els valors característics de  $P(s)$  són  $K = 0,9$  i  $d = 0,46$ . Per acabar de definir el sistema, a més, es col·loca un integrador, un zero a  $-2$  i tres pols, el primer a  $-1,17$  i un parell de pols complexos a  $-0,5 \pm j0,58$ .

La resposta temporal i el senyal de control, en verd i blau respectivament, es mostren a la dreta de la Il·lustració 24.



Il·lustració 24. Pantalla de l'exemple 2.

## 8. Disseny de controladors per assignació de pols

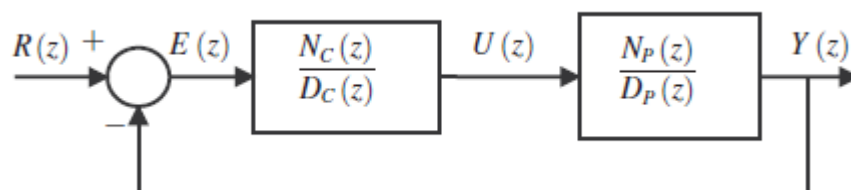
### 8.1. Contingut teòric

#### 8.1.1. Introducció

Un dels objectius principals dels sistemes de control és que el sistema de llaç tancat presenti la resposta temporal volguda, la qual ve determinada, principalment, pels seus pols.

Així, l'objectiu del disseny per assignació de pols és fixar els pols de llaç tancat; d'aquesta manera, es pot forçar l'estabilitat de llaç tancat i dissenyar-ne la resposta temporal.

#### 8.1.2. Definicions



*Il·lustració 25. Sistema de llaç tancat*

Es pren com a punt de partida el sistema de la *Il·lustració 25*. En aquesta, es disposa d'una planta en temps discret  $P(z)$ , que es descriu mitjançant una funció de transferència:

$$P(z) = \frac{N_P(z)}{D_P(z)} = \frac{b_p z^p + b_{p-1} z^{p-1} + b_{p-2} z^{p-2} + \dots + b_1 z + b_0}{z^m + a_{m-1} z^{m-1} + a_{m-2} z^{m-2} + \dots + a_1 z + a_0}$$

*Equació 72. Funció de transferència de la planta.*

On  $N_p(z)$  i  $D_p(z)$  són polinomis, amb  $m = \text{grau}\{D_p(z)\} \geq p = \text{grau}\{N_p(z)\}$ . S'assumeix que hi ha un controlador,  $C(z)$ , connectat en cascada, que es presenta mitjançant una funció de transferència de la forma següent:



$$C(z) = \frac{N_c(z)}{D_c(z)} = \frac{d_1 z^l + d_{l-1} z^{l-1} + d_{l-2} z^{l-2} + \dots + d_1 z + d_0}{z^q + c_{q-1} z^{q-1} + c_{q-2} z^{q-2} + \dots + c_1 z + c_0}$$

*Equació 73. Funció de transferència d'un controlador.*

On  $N_c(z)$  i  $D_c(z)$  són polinomis, amb  $q = \text{grau}\{D_c(z)\} \geq l = \text{grau}\{N_c(z)\}$ . Amb aquestes hipòtesis, la relació entre la referència  $R(z)$  i la sortida  $Y(z)$  ve donada per:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} = \frac{\frac{N_c(z)N_p(z)}{D_c(z)D_p(z)}}{1 + \frac{N_c(z)N_p(z)}{D_c(z)D_p(z)}} = \frac{N_c(z)N_p(z)}{N_c(z)N_p(z) + D_c(z)D_p(z)}$$

*Equació 74. Funció que relaciona la referència i la sortida d'un sistema.*

Donat un sistema de llaç tancat com el de la *Il·lustració 25*, amb:

$$C(z) = \frac{N_c(z)}{D_c(z)} \quad P(z) = \frac{N_p(z)}{D_p(z)}$$

*Equació 75. Funció de transferència d'un controlador i de la planta.*

S'assumeix que  $C(z)$  i  $P(z)$  no presenten cancel·lacions, és a dir,  $N_p(z)$  i  $D_c(z)$ , i  $D_p(z)$  i  $N_c(z)$  no presenten zeros en comú. La funció de transferència que relaciona la referència amb la sortida compleix:

- L'ordre del sistema de llaç tancat correspon a l'ordre del controlador més l'ordre de la planta.

En altres paraules, el grau del polinomi del denominador de la funció de llaç tancat correspon al grau del polinomi del denominador de la planta  $D_p(z)$  més el grau del polinomi del denominador del controlador  $D_c(z)$ .

$$\text{grau}\{N_c(z)N_p(z) + D_c(z)D_p(z)\} = \text{grau}\{D_c(z)\} + \text{grau}\{D_p(z)\}$$

*Equació 76. Ordre del sistema.*

- Els zeros del sistema de llaç tancat  $T(z)$  correspon als zeros del polinomi

$$N_c(z)N_p(z).$$

En cas de voler eliminar algun zero,  $z_0$ , de la planta  $N_p(z_0) = 0$ , cal incorporar un terme de la forma  $(z - z_0)$  al denominador del controlador. Això només es pot fer si  $|z_0| < 1$ ; altrament, en cas que  $|z_0| \geq 1$ , una cancel·lació d'aquest estil generaria un sistema que no és internament estable.

Els pols del sistema són zeros del polinomi del denominador de  $T(z)$ :

$$N_c(z)N_p(z) + D_c(z)D_p(z) = 0$$

*Equació 77. Denominador de  $T(z)$ .*

Aquests pols determinen l'estabilitat i permeten caracteritzar la resposta temporal del sistema de llaç tancat. L'objectiu de disseny és fixar els pols del sistema de llaç tancat, en altres paraules, el que es pretén és donar forma al polinomi del denominador de  $T(z)$ .

El grau del polinomi és  $D(z) = N_c(z)N_p(z) + D_c(z)D_p(z)$  és  $n = \text{grau}\{D_c(z)\} + \text{grau}\{D_p(z)\}$ . No es perd generalitat si s'assumeix que  $D(z)$  és un polinomi mònic, és a dir, el coeficient del terme de grau  $n$  és 1. Si inicialment no ho és, es pot convertir en mònic dividint tot el polinomi pel coeficient de major grau. Amb aquesta hipòtesi es pot escriure:

$$D(z) = (z - p_1) \cdot (z - p_2) \cdots (z - p_n) = \prod_{k=1}^n (z - p_k) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1z + \alpha_0$$

*Equació 78. Denominador del sistema de llaç tancat.*

Els coeficients del polinomi es poden pensar com a funcions no lineals dels pols  $\alpha_k(p_i)$ .

Atès que  $D(z)$  és un polinomi sobre els reals, aleshores, si  $p_k$  és un pol complex, aleshores el seu conjugat també és un pol.

Cal assenyalar que, en els casos en què hi ha cancel·lació pol / zero, és a dir  $N_c(p_k)N_p(p_k) = 0$  i  $D_c(p_k)D_p(p_k) = 0$ , aleshores  $D(p_k) = 0$  i, per tant,  $p_k$  és també un pol de llaç tancat. Per als càlculs que es realitzaran a continuació, convé assumir que no hi ha cancel·lacions pol / zero.

Tot seguit, s'analitza quina forma presenten els coeficients del polinomi:

$$N_c(z)N_p(z) + D_c(z)D_p(z)$$

*Equació 79. Suma del producte de numeradors i denominadors.*

En funció dels coeficients dels polinomis que defineixen les funcions de transferència de la planta i el controlador. De forma preliminar, assenyalar que:

$$D_c(z)D_p(z) = z^{q+m} + (a_{m-1} + c_{q-1})z^{q+m-1} + (a_{m-2} + a_{m-1}c_{q-1} + c_{q-2})z^{q+m-2} + \dots + (a_k c_0 + a_{k-1}c_1 + a_{k-2}c_2 + \dots + a_0 c_k)z^k + \dots + (a_1 c_0 + c_1 a_0)z + a_0 c_0$$

*Equació 80. Producte de denominadors.*

$$N_c(z)N_p(z) = d_l b_p z^{l+p} + (d_l b_{p-1} + d_{l-1} b_p)z^{l+p-1} + (d_l b_{p-2} + d_{l-1} b_{p-1} + d_{l-2} b_p)z^{l+p-2} + \dots + (d_k b_0 + d_{k-1} b_1 + d_{k-2} b_2 + \dots + d_0 b_k)z^k + \dots + (d_1 b_0 + d_0 b_1)z + d_0 b_0$$

*Equació 81. Producte de numeradors.*

Així, quan  $m = p$  i  $q = l$  l'Equació 79 pren la forma:

$$N_c(z)N_p(z) + D_c(z)D_p(z) = (d_q b_m + 1)z^{q+m} + (d_q b_{m-1} + d_{q-1} b_m + a_{q-1} + c_{m-1})z^{q+m-1} + \dots + (d_1 b_0 + d_0 b_1 + a_1 c_0 + c_1 a_0)z + d_0 b_0 + a_0 c_0$$

*Equació 82. Suma del producte de numeradors i denominadors desenvolupada.*

Quan  $m = p+1$  i  $q = l$  l'Equació 79 pren la forma:

$$N_c(z)N_p(z) + D_c(z)D_p(z) = z^{q+m} + (d_q b_{m-1} + d_{q-1} b_m + a_{q-1} + c_{m-1})z^{q+m-1} + \dots + (d_1 b_0 + d_0 b_1 + a_1 c_0 + c_1 a_0)z + d_0 b_0 + a_0 c_0$$

*Equació 83. Suma del producte de numeradors i denominadors desenvolupada.*

### 8.1.3. Disseny de controladors

Per tal que  $N_c(z)N_p(z) + D_c(z)D_p(z)$  presenti els pols volguts,  $p_k$ , cal que els coeficients de l'Equació 78 siguin iguals als coeficients de l'Equació 83 si  $m = p+1$  i  $q = l$  (cas més

freqüent) o als de l'Equació 82 si  $m = p$  i  $q = l$ , tenint en compte que cal transformar el polinomi en un de mònic abans d'igualar coeficients, provocant que algunes equacions es transformin en no lineals. Per al cas més freqüent, aquesta igualació genera un sistema de  $q + m$  equacions:

$$\begin{aligned} d_q b_{m-1} + a_{m-1} c_{q-1} &= \alpha_{q+m-1}(p_k) \\ &\vdots \\ d_0 b_0 + a_0 c_0 &= \alpha_0(p_k) \end{aligned}$$

Equació 84. Sistema d'equacions per al disseny de controladors.

En el disseny de controladors,  $P(z)$  està determinat i, per tant, els coeficients  $N_p(z)$ ,  $b_k$ , i els coeficients de  $D_p(z)$ ,  $a_k$ , són coneguts. En contrapartida, els coeficients  $N_c(z)$ ,  $d_k$ , i els coeficients de  $D_c(z)$ ,  $c_k$ , són variables lliures i, per tant, paràmetres de disseny. Així, l'objectiu és trobar el valor de  $d_k$  i  $c_k$ , un cop fixats els pols de llaç tancat,  $p_k$ , que són les especificacions.

Per resoldre el sistema d'equacions, es pot plantejar de la forma:

$$\begin{bmatrix} b_{m-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{m-2} & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & a_{m-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & 0 & \dots & \dots & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_q \\ d_{q-1} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \\ c_{q-1} \\ c_{q-2} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ a_{m-2} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{q+m-1}(p_k) \\ \alpha_{q+m-2}(p_k) \\ \vdots \\ \alpha_1(p_k) \\ \alpha_0(p_k) \end{bmatrix}$$

Equació 85. Sistema matricial per al disseny de controladors.

Aquest és un sistema lineal que és fàcilment resoluble emprant mètodes numèrics.

En funció del nombre d'equacions i el nombre d'incògnites, els sistemes lineals es classifiquen en:

- **Determinats.** En aquest cas, hi ha tants paràmetres com pols de llaç tancat.

Cal assenyalar que el sistema de llaç tancat presenta  $q + m$  pols; per tant, perquè el controlador, que presenta  $q$  paràmetres lliures en el numerador i  $q + 1$  paràmetres lliures en el denominador, pugui fixar tots els pols de llaç tancat cal que compleixi  $q + m = 2q + 1 \rightarrow q = m - 1$ .

Així, si tenim una planta d'ordre  $m$ , per poder fixar tots els pols de llaç tancat serà necessari disposar d'un controlador de la forma que es presenta en l'Equació cc d'ordre  $q = m - 1$ .

- **Sobredeterminats.** En aquest cas, hi ha més paràmetres lliures que pols de llaç tancat.

Quan es disposa d'un controlador d'ordre més elevat del necessari  $q > m - 1$ , un cop fixats els pols de llaç tancat és possible fixar altres característiques d'interès. Unes especificacions especialment rellevants són aquelles lligades a la precisió. És important adonar-se que fixar els pols no implica res sobre les característiques de precisió.

Si per exemple es volen afegir dues restriccions addicionals a les que ja s'han imposat pels pols, cal disposar d'un controlador de la forma de l'Equació 73, que compleixi  $q + m + 2 = 2q + 1 \rightarrow q = m + 1$ .

En cas que les especificacions addicionals es puguin expressar en forma d'equacions lineals, la resolució del sistema complet es realitzarà emprant un procediment de resolució d'equacions lineals que presenta solució directa. En cas contrari, si s'hi incorporen especificacions amb restriccions no lineals, serà necessari emprar algorismes iteratius més sofisticats.

- **Subdeterminats.** En aquest cas, hi ha menys paràmetres lliures que pols de llaç tancat.

En algunes ocasions, es disposa de controladors d'estructura fixa, de tipus PID o avanç-retard. Aquest tipus de controladors són d'ordre baix i disposen de pocs paràmetres lliures. Això fa que en la majoria de casos no sigui possible fixar tots els pols de llaç tancat. Atès que no es poden fixar tots els pols, en plantejar el sistema mostrat en l'Equació 85, alguns dels pols es converteixen en incògnites  $p_k'$ , i la resta

es mantenen com a especificacions  $p_k$ . El nombre de pols que es mantenen com a especificacions,  $p_k$ , ha de ser igual al nombre de paràmetres de disseny.

Clarament, els pols lliures  $p_k'$ , que són funció dels paràmetres de la planta i els pols especificats,  $p_k$ , alteren el comportament del sistema de llaç tancat. Aquesta alteració es pot classificar en les categories següents:

- **Pols lliures inestables.** En cas que algun dels pols lliures compleixi  $|p_k| \geq 1$ , el sistema de llaç tancat serà inestable i, per tant, el disseny del controlador no és acceptable. Per solucionar el problema, hi ha dues opcions: una primera opció és canviar les especificacions i fixar uns altres pols,  $p_k$ . Alternativament, es pot emprar un controlador amb més paràmetres lliures, cosa que permetria fixar un nombre més elevat de pols.
- **Pols lliures dominants.** És possible que els pols lliures estiguin a l'interior del cercle unitat però siguin dominants respecte als pols fixats, és a dir  $|p_k| \geq |p_l|$ . En aquest cas, tot i que el sistema de llaç tancat és estable, aquest no es comportarà d'acord amb les especificacions volgudes. Per tant, en principi es tracta d'un disseny poc recomanable.
- **Pols lliures no dominants.** Aquest cas correspon al cas ideal, perquè encara que el sistema presenti més pols que els especificats el comportament dels pols addicionals és poc rellevant i el sistema de llaç tancat es comporta, aproximadament, tal com s'ha especificat.

Malauradament, no hi ha un mecanisme clar que permeti analitzar a priori en quines condicions s'estarà en funció dels paràmetres de la planta i els pols especificats.

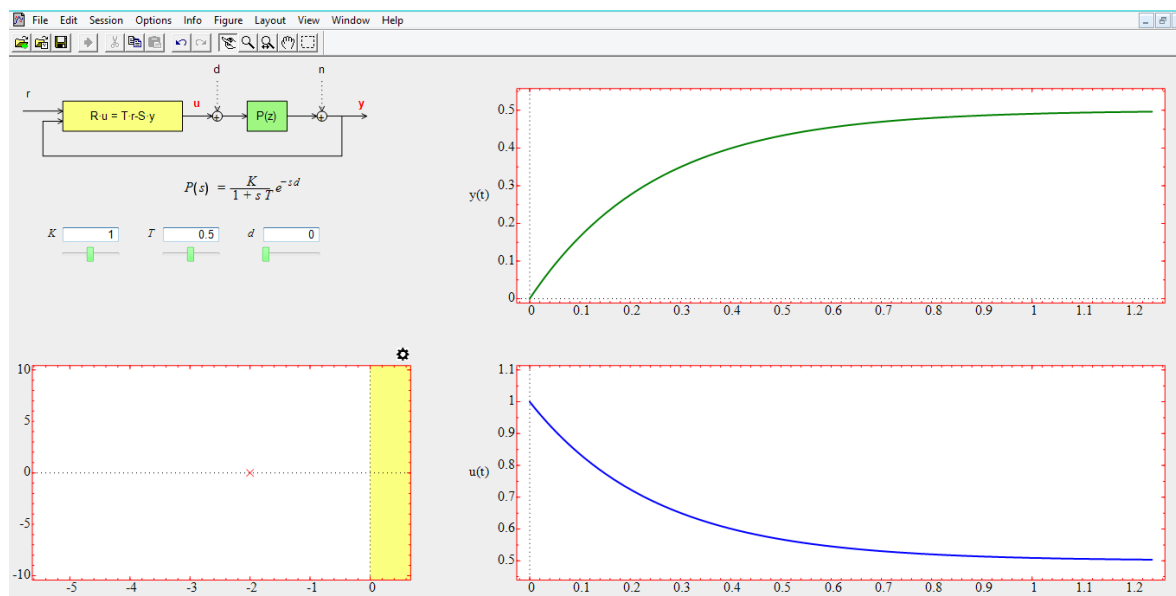
## 8.2. Pantalla

L'objectiu principal d'aquesta aplicació és el disseny de controladors per assignació de pols.

L'eina garanteix que les funcions de transferència siguin pròpies o causals (el grau del

polinomi del denominador o polinomi característic ha de ser més gran o igual que el grau del polinomi del numerador).

En l'eina interactiva la distribució d'elements en pantalla és la següent:



*Il·lustració 26. Pantalla de l'aplicació.*

**Diagrama de blocs.** A la part superior esquerra es presenta el diagrama de blocs, se'n pot triar entre tres representacions possibles, les mostrades en la *Il·lustració 3*, la *Il·lustració 4* i la *Il·lustració 5*, accedint al menú *Options > Block diagram configuration > Type i* sent  $i = 1, 2, 3$ . Per defecte apareix la realimentació negativa activada, aquesta es pot desactivar fent clic sobre la línia que la representa, passant a ser aquesta una línia discontinua.

Pel que fa a les entrades, en prémer sobre la  $r$  se'n pot triar la referència d'entre el conjunt d'entrades presentades a l'apartat 6.4.2 i el mateix succeeix amb les pertorbacions en fer clic sobre  $d$  o  $n$ . Les pertorbacions poden ser activades (línia continua) o desactivades (línia discontinua) en prémer sobre les línies que les representen.

Es pot triar la funció de transferència del controlador fent clic sobre el bloc que el representa. Totes les configuracions possibles es mostren en la *Il·lustració 16* i es poden definir a partir dels seus paràmetres o mitjançant el mapa de pols i zeros. Si és necessari dissenyar un controlador, caldrà fer ús tant de les barres mòbils com del mapa de pols i

zeros per tal d'afegir-los, tot i que per variar el seu valor o eliminar-los només caldrà fer clic o doble clic en la funció de transferència, respectivament.

La planta es pot modelitzar de diferents maneres, tal com es mostra en la *Il·lustració 17*. En prémer el bloc corresponent apareix una finestra que permet triar la forma desitjada i se'n poden variar els paràmetres mitjançant barres mòbils. Si és necessari dissenyar una planta, caldrà fer ús tant de les barres mòbils com del mapa de pols i zeros, tal com succeeix amb el controlador.

**Mapa de pols i zeros.** A la part inferior esquerra es mostra un editor de pols i zeros per a configurar la funció de transferència del sistema. Si els pols i zeros queden definits amb la modelització del controlador i la planta del diagrama de blocs només se'n podrà variar el seu valor, en cas contrari, a més se'n podran afegir i eliminar tants pols i zeros com es desitgi, només caldrà desplaçar els elements del repositori al mapa o viceversa.

Per al controlador els pols reals es representen amb una creu blava (x), els integradors també tot i que es mostren a la part superior com una / i el complexes de la mateixa manera, però en negreta (x). De la mateixa manera, els zeros reals es representen amb un cercle blau (o), els derivadors també tot i que es mostren en la part superior com una D i els complexes de la mateixa manera però en negreta (o). En passar el ratolí per sobre dels pols i zeros, s'indica la seva posició.

Per a la planta els pols reals es representen amb una creu vermella (x), els integradors també tot i que es mostren a la part superior com una / i el complexes de la mateixa manera, però en negreta (x). De la mateixa manera, els zeros reals es representen amb un cercle vermell (o), els derivadors també tot i que es mostren en la part superior com una D i els complexes de la mateixa manera però en negreta (o). En passar el ratolí per sobre dels pols i zeros, s'indica la seva posició.

Per últim, a la part superior dreta apareix una icona que permet bloquejar o variar l'escala del mapa de pols i zeros.

**Senyal d'entrada, pertorbacions, senyal de control i resposta temporal.** En la zona dreta de l'aplicació s'inclou per defecte, en la part superior i de color verd, la gràfica de la resposta temporal del sistema representat i, en la part inferior i de color blau, el senyal de control. No obstant això, en prémer sobre la  $r$ ,  $d$  i  $n$  del diagrama de blocs, que



representen el senyal d'entrada i les pertorbacions respectivament, van apareixent dites gràfiques. Per tornar a fer aparèixer el senyal de control o la resposta temporal, nomé caldrà prémer sobre la  $u$  o la  $y$  del diagrama de blocs, respectivament.

## 8.3. Exemples

### 8.3.1. Sistema estable

El primer exemple, amb un diagrama de blocs de tipus 2, representa un sistema estable. La referència és un graó unitari, la pertorbació  $d$  també és un graó, però d'amplitud 0,25, mentre que la pertorbació  $n$  roman desactivada.

Es defineix el controlador a partir de les seves característiques, seguint l'estructura mostrada en l'Equació 86:

$$C(s) = \frac{K \text{ zeros}}{s^h \text{ pols}}$$

*Equació 86. Controlador de l'exemple 1.*

Els valor de  $K = 1$  i s'afegeixen un derivador, un pol a -2,48 i un parell de pols complexos conjugats a  $-3,87 + j3,87$  i  $-3,87 - j3,87$ .

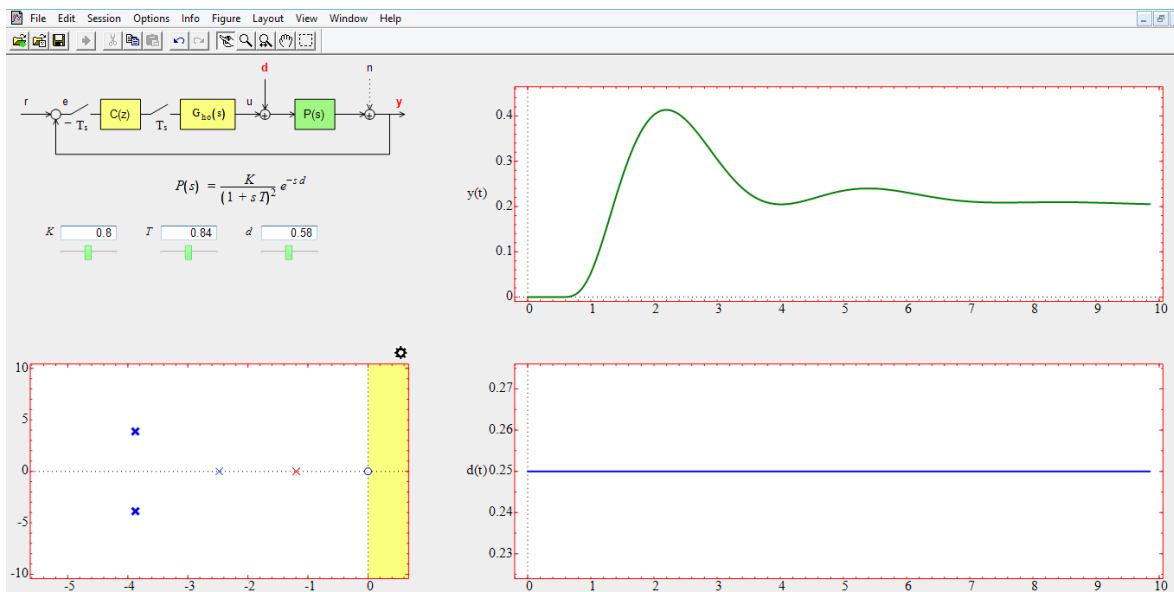
La planta ve donada per:

$$P(s) = \frac{K}{(1 + sT)^2} e^{-sd} = \frac{0,8}{(1 + 0,84 \cdot s)^2} e^{-0,58s}$$

*Equació 87. Planta de l'exemple 1.*

Al mapa de pols i zeros, a més dels introduïts pel controlador, s'observa un pol a -1,19.

La resposta temporal i la pertorbació  $d$ , en verd i blau respectivament, es mostren a la dreta de la Il·lustració 27.



Il·lustració 27. Pantalla de l'exemple 1.

### 8.3.2. Sistema inestable

El segon exemple, amb un diagrama de blocs de tipus 1, representa un sistema inestable. La referència és una rampa unitària, les pertorbacions romanen desactivades i la realimentació negativa activada.

Com a controlador es presenta un PID, de la forma:

$$C(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] = 1,25 \left[ 1 + \frac{1}{0,82 \cdot s} + 0,15 \cdot s \right]$$

Equació 88. Controlador de l'exemple 2.

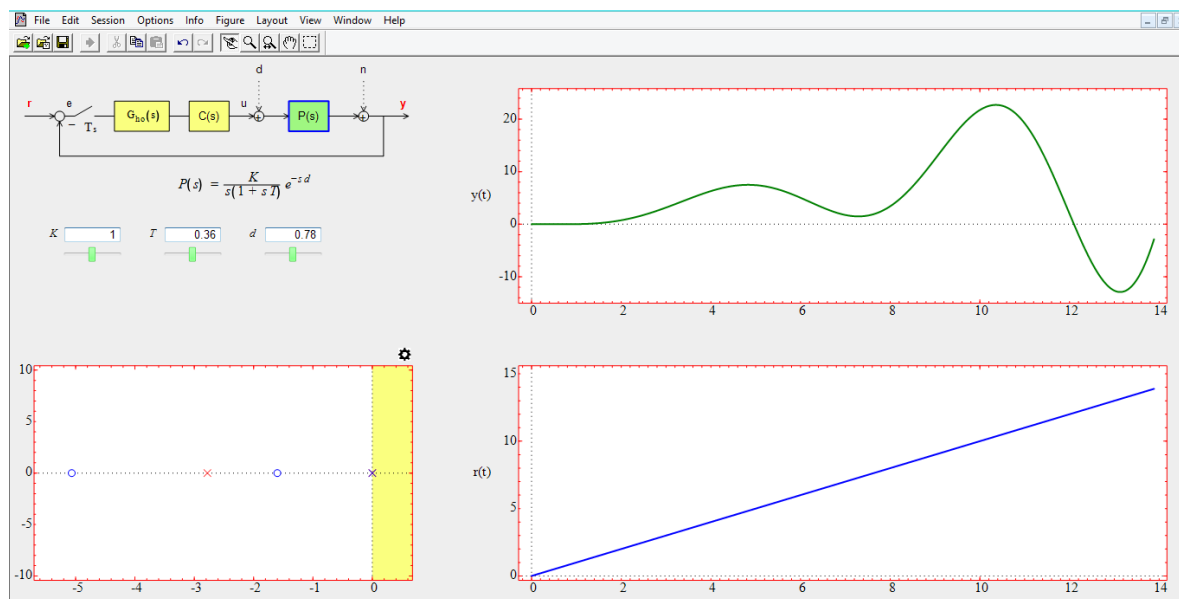
Es defineix la funció de transferència de la següent manera:

$$P(s) = \frac{K}{s(1 + sT)} e^{-sd} = \frac{1}{s(1 + 0,36 \cdot s)} e^{-0,38s}$$

Equació 89. Planta de l'exemple 2.

Al mapa de pols i zeros s'observa un pol provinent de la planta a -2,78 i el controlador aporta un integrador i dos zeros a -5,07 i -1,06.

La resposta temporal i la referència, en verd i blau respectivament, es mostren a la dreta de la Il·lustració 28.



Il·lustració 28. Pantalla de l'exemple 2.

## 9. Estudi d'impacte

### 9.1. Ambiental

El projecte presentat s'ha basat enterament en el desenvolupament de programari i disseny per ordinador, per tant, la major part de l'impacte ambiental ha estat associat a l'ús dels recursos energètics emprats per al funcionament dels equips informàtics.

També es pot considerar l'ús de paper i consumibles ofimàtics, com la tinta de la impressora, necessaris per disposar de documentació.

#### 9.1.1. Realització del projecte

El consum d'electricitat comporta un impacte ambiental indirecte derivat de la producció d'aquesta mateixa electricitat que es consumeix. Se suposa un consum mitjà de l'ordinador amb la pantalla en mode encesa de 0,065 kW i el temps de desenvolupament del projecte en ordinador és d'unes 450 hores, sense tenir en compte les hores de redactat de memòria.

A la *Taula 1* es presenta el consum associat a la producció de l'energia utilitzada durant el desenvolupament del projecte.

<b>Temps de desenvolupament</b>	<b>Potencia consumida</b>	<b>Consum elèctric</b>
<b>450 h</b>	0,065 kW	29,25 kWh

*Taula 1 Dades sobre el consum elèctric durant el desenvolupament del projecte.*

Per altra banda, després de consultar la pàgina web del Ministeri de Medi Ambient es comprova que un projecte amb les característiques del present no s'hauria de sotmetre a cap tipus d'avaluació d'impacte ambiental, així i tot es calcularà el CO<sub>2</sub> generat.

La normativa aplicable a l'Avaluació d'Impacte Ambiental de projectes està presidida per la Directiva 85/337/CEE.

Tipus d'emissions	Factor	Consum elèctric	Emissions atmosfèriques
<b>Diòxid de carboni (CO2)</b>	0,392 kg/kWh	29,25 kWh	11,46 kg

*Taula 2. Emissions contaminants produïdes.*

A la *Taula 2* es mostren les emissions contaminants produïdes.

### 9.1.2. Posada en pràctica del projecte

Tal com s'ha comentat a l'apartat anterior, es tracta d'un projecte de característiques informàtiques i això provoca que tingui un impacte ambiental baix. Per a la posada en pràctica del present projecte, l'impacte ambiental és gairebé el mateix que per a la realització d'aquest, ja que cada usuari només necessita un ordinador per treballar amb les aplicacions interactives. Així doncs, només es considera el consum elèctric de l'ordinador personal que fa servir l'usuari.

## 9.2. Social

L'impacte social que pot ocasionar aquest projecte és la millora en les tècniques d'aprenentatge.

Tradicionalment, el coneixement ha estat transmès de manera oral o mitjançant l'ús de llibres i fórmules estàtiques. Les aplicacions creades poden suposar una motivació per als estudiants en el seu procés d'aprenentatge, ja que requereixen d'una implicació que provoca que l'alumne adquireixi un paper més important en el procés educatiu.

Les millores en el camp de l'educació, comporten millores en qualsevol aspecte d'una civilització o societat.

## 10. Estudi econòmic

L'anàlisi econòmic del present projecte requereix dos blocs ben diferenciats: un primer pressupost on es presenta el cos de la realització del projecte i un segon on s'exposen els costos de posar-lo en funcionament.

### 10.1. Realització del projecte

En aquest primer bloc cal tenir present les despeses de material així com les de personal.

Les primeres són degudes a l'adquisició del material necessari per a crear les aplicacions interactives, així com el material d'oficina emprat per a la documentació del projecte. Les partides d'aquestes despeses són:

- Ordinador portàtil.
- Programa *Sysquake*.
- Material d'oficina.

D'altra banda, les despeses de personal són el resultat de les hores emprades en la realització del projecte. Els costos associats a aquestes despeses són:

- Familiarització amb l'entorn de programació.
- Disseny, implementació i documentació de les aplicacions interactives.
- Redacció de la memòria.

S'ha considerat, per a cadascuna de les tasques un sou mitjà de 8€/h. Aquest salari és l'establert com a mínim per a un estudiant d'enginyeria industrial de l'*Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona* en conveni de pràctiques.

Així, el pressupost de la realització del projecte es resumeix en la *Taula 3*.

Concepte	Quantitat	Cost unitari	Cost
<b>Despeses personal</b>	<b>[h]</b>	<b>[€/h]</b>	<b>[€]</b>
Familiarització programa	30	8	240
Elaboració aplicacions	450	8	3600
Redacció memòria	250	8	2000
<b>Total despeses personal</b>			<b>5840</b>
<b>Despeses material</b>	<b>[u]</b>	<b>[€/u]</b>	<b>[€]</b>
Ordinador portàtil		1	1200
Sysquake		1	887
Material d'oficina			100
<b>Total despeses material</b>			<b>2187</b>
<b>Total</b>			<b>8027</b>

*Taula 3. Pressupost de la realització del projecte.*

Altres partides que haguessin pogut ser considerades en aquest pressupost són el cost de l'energia elèctrica que precisa l'ordinador, així com les despeses de transport degudes als desplaçaments necessaris per assistir a les tutories. Cal destacar però, que en un projecte d'aquestes característiques el cost total es basa, principalment, en el treball dedicat pel dissenyador i programador de les aplicacions interactives

## 10.2. Posada en marxa del projecte

Per a posar en marxa qualsevol projecte és indispensable conèixer el cost que suposarà l'adquisició de tot el material necessari. En el cas de les aplicacions interactives es necessita un ordinador i el programa *Sysquake*. Avui en dia, els potencials usuaris d'aquestes aplicacions ja disposen d'ordinador, com també en disposen les escoles o

universitats que volguessin adquirir aquest producte de cara a l'ensenyament. Donades les circumstàncies, només es té en compte les despeses d'adquisició del programa, el qual es pot adquirir directament mitjançant el seu distribuïdor *Calerga Sarl*.

El preu de venda del programa *Sysquake* varia en funció de qui sigui el comprador (escoles / universitats i comprador independent), ja que diferencia entre si és per ús acadèmic o personal. També varia segons el nombre de llicències adquirides i segons si es compra en format CD o es descarrega des de la web. La *Taula 4* presenta els preus de venda:

	CD		Descàrrega
	1 llicència (1 ordinador)	5 llicències (5 ordinadors)	
<b>Escoles / universitats</b>	887 €	2525 €	806 €
<b>Comprador independent</b>	2115 €	6209 €	1911 €

*Taula 4. Preus de venda del programa Sysquake.*





## Conclusions

En els últims anys s'ha produït una creixent revolució pel que fa als mètodes d'aprenentatge. En el camp de la teoria de control automàtic això es reflecteix en l'aparició de nombroses aplicacions gràfiques que exploten la visualització i la interactivitat.

La introducció d'alguns conceptes pot ser difícil des del punt de vista analític, no obstant això, les representacions gràfiques i la manipulació d'aquestes poden esdevenir un bon suport per a fer més entenedors els conceptes que s'amaguen darrere de la teoria.

Seguint aquesta línia, en aquest projecte s'han dissenyat dues aplicacions interactives que tenen per objectiu donar suport a la docència. Poden emprar-se com a reforç en classes teòriques o com a base de l'aprenentatge autònom de l'estudiant. Per a la implementació d'aquestes s'ha emprat el programa *Sysquake* per les grans facilitats que presenta pel que fa a visualització i interactivitat, especialment en el camp del control automàtic.

Pel que fa a les aplicacions interactives, primerament s'ha definit la filosofia d'aquestes i el procediment d'elaboració, per a continuació mostrar alguns dels conceptes més bàsics de la teoria de control automàtic, així com els elements més representatius que tenen en comú les diferents aplicacions.

A continuació s'exposa el contingut teòric, l'explicació dels elements que es mostren per pantalla i algun exemple que permet visualitzar l'exposat en els dos apartats anteriors per a cada aplicació interactiva. La primera presenta la resposta temporal en temps continu a partir de la definició de l'espai d'estats. En la segona, s'analitza el disseny de controladors per assignació de pols.

Per últim, destacar que el camp de la teoria de control automàtic és molt extens i existeixen un gran nombre de conceptes que poden enriquir-se d'aquest tipus d'eines, per tant, aquestes dues aplicacions interactives són només una petita contribució al material docent existent i futur.



## Agraïments

En primer lloc m'agradaria dedicar unes línies d'agraïment al tutor del projecte, en Ramón Costa Castelló, per saber transmetre les ganes i els coneixements a parts iguals. Ell dóna sentit a la motivació d'aquest projecte, es mostra proper i accessible i busca la participació activa de l'alumne en el procés d'aprenentatge. Gràcies pel llibre que m'ha servit de guia, "*Control automático con herramientas interactivas*".

Un especial agraïment a la meua mare, per preguntar si necessitava alguna cosa a mitjanit mentre estudiava, per encendre l'espelma gastada mentre m'examinava i per haver cregut en mi fins i tot quan jo havia deixat de fer-ho. Aquesta és la meua manera de dir-li que la seva dedicació no han estat en va, aquest projecte simbolitza el final d'una etapa que també és producte del seu esforç.

Per últim, als meus amics, en especial a la Clàudia Jover Segura, per compartir aquesta carrera a contrarellotge que ens ha obligat a treure el millor de nosaltres mateixos i portar les nostres capacitats més enllà dels límits.



# Bibliografia

## Referències bibliogràfiques

- [1] J. L. GUZMAN, S. DORMIDO, M. BERENGUEL. *Interactivity in Education: An Experience in the Automatic Control Field*. Volume 21, Issue 2.
- [2] PIQUET, Y., Sysquake User Manual, Calerga Sarl.  
[[http://www.calerga.com/doc/SQPro\\_60.pdf](http://www.calerga.com/doc/SQPro_60.pdf), 5 d'Agost de 2018]
- [3] J.L. GUZMAN, R. COSTA, M. BERENGUEL, S. DORMIDO. *Control automático con herramientas interactivas*. UNED.
- [4] J.J. SALT, A. CUENCA, V. CASANOVA, A. CORRECHER. *Control automático: Tiempo Continuo y Tiempo Discreto*. Segunda edición. UPV.
- [5] R. COSTA, E. FOSSAS. *Sistemas de control en temps discret*. UPC.
- [6] B. C. KUO, *Sistemas de Control Automático*. Séptima edición. Prentice Hall.
- [7] K. OGATA, *Ingeniería de control moderna*. Cuarta edición. Pearson Prentice Hall.

## Bibliografia complementària

- FÀBREGAS CORNELLÀ, JOSEP. *Aplicacions interactives per a la docència de teoria de sistemes lineals*. Projecte de Fi de Carrera, UPC, maig 2007.
- LANGOYO MENASANCH, MARIA. *Disseny d'aplicacions interactives en la teoria de control*. Projecte de Fi de Carrera, UPC, juny 2014.
- GALCERAN KIMURA, MARC-JUAN. *Disseny d'aplicacions per a controladors en el domini freqüencial*. Treball Fi de Grau, UPC, gener 2017.